

УДК 517.548.2

КОЭФФИЦИЕНТ БЕЛЬТРАМИ, МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

© Т. Г. Латфуллин

tlatfullin@yandex.ru

Тюменский государственный университет, Тюмень

Пусть $D = \{|z| \leq 1\}$ единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ дифференцируемое (в смысле $\mathbb{R}^2$) отображение. Если $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$, то дифференциал f имеет представление

$$df(z) = f_z(z)dz + f_{\bar{z}}(z)d\bar{z},$$

где $f_z = (1/2)(f_x - if_y)$, $f_{\bar{z}} = (1/2)(f_x + if_y)$.

Гомеоморфизм $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, сохраняющий ориентацию, называется квазиконформным, если он принадлежит соболевскому классу W_2^1 локально в круге D и существует измеримая функция $\mu : D \rightarrow \mathbb{C}$, $|\mu(z)| \leq q < 1$, такая, что в точках, где определены f_z и $f_{\bar{z}}$ выполнено

$$f_{\bar{z}}(z) = \mu(z)f_z(z). \quad (1)$$

Уравнение (1) называется уравнением Бельтрами, а функция μ комплексной характеристикой отображения f [1], [2] (или коэффициентом Бельтрами). Для любого коэффициента Бельтрами μ существует гомеоморфизм круга D на себя, удовлетворяющий уравнению (1), (см., например [1], [2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f : D \rightarrow D$ квазиконформный гомеоморфизм, удовлетворяющий уравнению (1). Для точек z_1, z_2 из D определим расстояние

$$\rho(z_1, z_2) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} |dz + \mu(z)dz|,$$

где точная нижняя грань берется по всем спрямляемым кривым, соединяющим z_1 и z_2 в D .

Утверждение 1. Тожественное отображение круга D является квазиизометрическим отображением евклидова круга D на метрическое пространство (D, ρ) .

Утверждение 2. Существует почти всюду конформный гомеоморфизм круга D на метрическое пространство (D, ρ) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение f^{-1} , обратное к f , квазиконформно, поэтому дифференцируемо почти всюду. Пусть w – точка дифференцируемости f^{-1} . Через φ обозначим гомеоморфизм D на (D, ρ) утверждения 1. Тогда композиция $\varphi \circ f^{-1}$ переводит бесконечно малый круг с центром в точке w в бесконечно малый круг метрического пространства (D, ρ) .

Вывод. Любому коэффициенту Бельтрами соответствует единственное метрическое пространство (D, ρ) , также как соответствует единственный нормированный квазиконформный гомеоморфизм [1]. Это означает, что информацию о поведении решения уравнения (1) можно получить исследуя соответствующее метрическое пространство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векун И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 512 с.
2. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969. 135 с.