

УДК 517.5

ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ ПОЛУОСИ НЕРАВЕНСТВА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

© В. Г. Лежнев

lzhnv@mail.kubsu.ru

Кубанский государственный университет, Краснодар

Множество целых функций $F(z)$, $z = x + iy$, экспоненциального типа (т. е. таких, что

$$|F(z)| \leq C \exp(\sigma|z|)$$

для некоторого $\sigma > 0$), ограниченных на вещественной оси, обозначим через B_σ .

Неравенством Бернштейна для целых функций называется следующее утверждение [1]: если $F(z) \in B_\sigma$, то

$$|F'(x)| \leq \sigma \sup |F(x)|, \quad -\infty < x < \infty.$$

Известны различные обобщения этого утверждения ([1–4]), мы рассмотрим естественный подкласс ограниченных на полуоси функций из B_σ .

Обозначим через B_σ^+ множество целых функций экспоненциального типа $\leq \sigma$, ограниченных на полуоси $\{z = x + iy : x > 0, y = 0\}$. Докажем отдельно следующее утверждение.

Теорема 1. Если $F(z) \in B_\sigma^+$, то $F'(x) \in B_\sigma^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(s)$ — преобразование Бореля функции $F(z)$ [5], f аналитична в круге $\{s : |s| > \sigma\}$, и выполняется равенство

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(s) e^{zs} ds,$$

где L — окружность радиуса $R > \sigma$ с центром в начале координат, с положительным направлением обхода. Пусть

$$L^+ = L \cap \{s : \operatorname{Re} s \geq 0\}, \quad L^- = L \cap \{s : \operatorname{Re} s \leq 0\}$$

— правая и левая полуокружности, $L = L^+ \cup L^-$, и пусть

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^-} f(s) e^{zs} ds.$$

Функция $f(s)$ непрерывна на L , следовательно, $F_1(z)$ и

$$F_1'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^-} s f(s) e^{zs} ds$$

ограничены при $z = x > 0$.

Функция

$$F_2(z) := F(z) - F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} f(s) e^{zs} ds$$

есть целая функция экспоненциального типа не выше σ . Как и выше, получаем, что $F_2(z)$ ограничена при $z = x < 0$. По условию леммы $F(z)$, а вместе с ней и $F_2(z)$, ограничены при $z = x > 0$, т. е. функция $F_2(z)$ ограничена на вещественной оси, а следовательно, по неравенству Бернштейна, и функция $F_2'(z)$. Теорема доказана.

Для доказательства равномерной в B_σ^+ оценки используются результаты и построения Л. Ф. Леонтьева [6].

Теорема 2. Если $F(z) \in B_\sigma^+$, то

$$|F'(x)| \leq C(\sigma) \sup |F(x)|, \quad x \geq 0,$$

где постоянная $C(\sigma)$ не зависит от F .

Отметим, что если $F(z)$ — целая функция порядка $1/2$ типа $\leq \sigma$ и $|F(x)| \leq M$ при $x \geq 0$, то ([1, с. 351])

$$|F'(x)| \leq \frac{1}{2} \sigma^2 M, \quad x \geq 0.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 06-01-96648.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1947.
2. Ахиезер Н. И., Левин Б. Я. Неравенства для производных, аналогичные неравенству С. Н. Бернштейна // ДАН СССР. 1957. Т. 117, № 3. С. 735–738.
3. Бари Н. К. Обобщения неравенств Бернштейна и Маркова // ДАН СССР. 1953. Т. 90, № 5.
4. Иванов В. И. Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных // Матем. заметки. 1975. Т. 18, № 4. С. 489–498.
5. Бибербах Л. Аналитическое продолжение. М., 1967.
6. Леонтьев Л. Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М., 1980.