Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 446–447

УДК 517.54

О ПОРЯДКЕ РОСТА ОТОБРАЖЕНИЙ С S-СУММИРУЕМОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

© А. Н. Малютина

ndm@main.tusur.ru

Томский государственный университет, Томск

Приведем примеры, которые показывают, что класс отображений с s-суммируемой характеристикой [1] не пуст и шире класса отображений с ограниченным искажением [2,3] и класса с ограниченным в среднем искажением.

Пример 1. В пространстве R^3 рассмотрим тор D, точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ которого удовлетворяют условиям $|x_1| < 1, |x_2| < 1, |x_3| < 1$, $x_1 = (R + r\cos\Theta)\cos\varphi$, $x_2 = (R + r\cos\Theta)\sin\varphi$, $x_3 = r\sin\Theta$; здесь $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \Theta < 2\pi$, $0 < r < R$, $R < 1$.

В области D зададим отображение $f : (r, \varphi, \Theta) \to (r, \varphi, r^p\Theta)$, где p — отрицательное число. Легко показать, что для чисел $\alpha > 0$, $\beta > 0$ существует число $0 > p > \max\{-(2\beta)^{-1}, -(1+\alpha)^{-1}\}$, для которого одновременно конечны интегралы вида $\int\limits_D k_I^\alpha(x,f)|J(x,f)|d\sigma_x < \infty$, $\int\limits_D k_O^\beta(x,f)d\sigma_x < \infty$. Ограниченность на компактах кратности отображения f не имеет места.

Пример 2. Пусть $D = \{x \in R^3 : 0 < x_1 < \infty, \quad 0 < x_2 < x_1^2, \quad 0 < x_3 < 1\}$.

Рассмотрим отображение: $f(x) = \{y \in R^3 : y_1 = x_1, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad y_3 = x_1^{1-\alpha}x_3\}$, которое отображает область D на область $D^* = \{y \in R^3 : 0 < y_1 < \infty, \quad y_2 < y_1, \quad 0 < y_3 < y_1^{1-\alpha}\}$.

Отображение f является отображением с s-суммируемой характеристикой при $s > 0$, $\alpha \ge 1,5$.

Теорема 1. *Пусть $f : D \to R^n$ — отображение с s-суммируемой характеристикой. Тогда выполняется неравенство $M(\Gamma^*) \le \inf\limits_{\rho \wedge \Gamma} \int\limits_D (\rho(x))^n K_I(x,f)d\sigma_x$, где Γ — некоторое семейство кривых в области D, Γ^* — образ Γ при отображении f.*

Нами установлена оценка искажения расстояний $|f(x) - f(x_0)|$ при стремлении x к изолированной точке x_0.

Теорема 2. *Пусть $f : D \to D^*$ — отображение с s-суммируемой характеристикой. Тогда для точки $x \in B^n(x_0, d)$, $d = \rho(x_0, \partial D)$, справедлива оценка $|f(x) - f(x_0)| \le \lambda R^* e^{-t(x,x_0)}$, где $R^* = R(f(x_0), f[B^n(x_0,d)])$, $R(x,A) = \sup\limits_{y\in A}|x-y|$, λ — некоторая величина, зависящая только от n, $t(x,x_0) = \left[\omega_{n-1}^{-1} \cdot n^{\frac{n(n-1)}{2}} \int\limits_D r^n(|x-x_0|, y)K_I(y,f)d\sigma_x\right]^{\frac{1}{1-n}}$ и $r(t,y)$ — произвольная функция, допустимая для семейства $\Gamma([0,t], S^n(s_0,d); B^n(x_0,d))$, $0 < t < d$.*

В [4] рассматривается поведение отображений квазиконформных в среднем в изолированной особой точке. В теореме 3 устанавливается порядок роста отображений с s-суммируемой характеристикой в окрестности изолированной особой точки.

Теорема 3. *Пусть f — отображение с s-суммируемой характристикой шара B^n на себя, $f(0) = 0$ и $\operatorname{vrai\,max}\limits_{x\in S(x_0,t)\bigcap D} K_I(x,f) \le \left(\ln\frac{c}{t}\right)^{\alpha(n-1)}$, где $0 < \alpha < 1$, $0 < t < 1$, постоянная $c \ge e$. Тогда $|f(x)| \le \lambda|x|^{g(c,|x|)}$, где $g(c,t) = n^{-\frac{n}{2}}\left[\beta((\ln ct^{-1})^\beta - (\ln c)^\beta)^{-1}\ln t^{-1}\right]^{\frac{1}{n-1}}$, $\beta = \alpha(n-1)+1$.*

Построен пример, показывающий, что порядок стремления к нулю функции $g(c,t)$ при $t \to 0$ в теореме 3 увеличить нельзя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малютина А. Н., Кривошеева И. И.,Баталова Н. Н.* Искажение сферического модуля семейства кривых. // Издание Томского государственного университета. 2001. № 3. С. 189–193.
2. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск, 1970. 39 с.
3. *Vaisala Ju.* Lectures on N-dimentional quasiconformal mappings in space // Ann. Acad. Sci. Fenn. A1. 1965. V. 362. P. 1–12.
4. *Стругов Ю. Ф.* Отображения, квазиконформные в среднем. Новосибирск, 1979. 39 с. Препринт АН СССР, Сиб. отд. ин-та математики.