

УДК 517.53:517.947.42

К ТЕОРЕМЕ РИМАНА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОДНОЙ И ДВУМЯ ПАРАМИ ХАРАКТЕРИСТИК

© В. М. Миклюков

miklyuk@mail.ru

Волгоградский государственный университет, Волгоград

Рассматривается проблема существования и единственности вырождающихся квазиконформных отображений с одной и двумя парами характеристик одной плоской области на другую. Формулируются нерешенные задачи.

1. Относительно невырожденного случая постановку задачи и основные результаты см. у М. А. Лаврентьева [1] и И. Н. Векуа [2]. Здесь имеются практически исчерпывающие результаты.

В случае вырождающихся квазиконформных отображений с двумя парами характеристик проблема изучена весьма недостаточно. Здесь оказываются определяющими связи скорости вырождения характеристик вблизи границы с конфигурациями областей. Первые результаты в указанном направлении можно найти у Г. Д. Суворова [3, §7 главы III].

Для вырождающихся квазиконформных отображений с одной парой характеристик ситуация несколько проще, хотя также не прояснена до конца. Установлены существование и единственность отображений с $W^{1,2}$ -мажорируемой характеристикой $p(z)$, что влечет, в частности, существование и единственность изотермических координат на негладких поверхностях класса $W^{2,2}$ (см. [4, глава 3]). Вместе с тем полного описания $W^{1,2}$ -мажорируемых функций в настоящее время не имеется.

2. В докладе приводятся теоремы о существовании и несуществовании вырождающихся квазиконформных отображений с двумя парами характеристик одной плоской области на другую, обобщающие и усиливающие соответствующие результаты из [5]. Приведем типичный результат.

Пусть $D, \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ — области в $z = (x, y)$ и $w = (u, v)$ плоскостях соответственно. Рассмотрим задачу о справедливости теоремы Римана для системы

$$a u_x + b u_y = v_y, \quad c u_x + d u_y = -v_x. \quad (1)$$

Предполагается, что

$$\operatorname{ess\,inf}_{D'} (ad - (b + c)^2/4) > 0 \quad \text{для всякой подобласти } D' \Subset D. \quad (2)$$

Символом $\tilde{\partial}D$ будем обозначать границу D в расширенной плоскости $\tilde{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Зафиксируем множество $\Gamma \subset \tilde{\partial}D$ и локально липшицеву функцию $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами: 1) $\lim_{z \rightarrow \Gamma} h(z) = 0$; 2) для произвольной подобласти $D' \Subset D$ выполнено

$$0 < \operatorname{ess\,inf}_{D'} |\nabla h(z)| \leq \operatorname{ess\,sup}_{D'} |\nabla h(z)| < \infty.$$

Пусть $E_t = \{z \in D : h(z) = t\}$. Положим

$$w(\Gamma) = \{w \in \tilde{\partial}\mathcal{D} : \exists z_n \in D, z_n \rightarrow \Gamma \text{ так, что } w(z_n) \rightarrow w\}.$$

Ясно, что если дуга $\Gamma \subset \partial D$ связна и граница ∂D является простой жордановой кривой, то $w(\Gamma)$ также связна.

Пусть $\mathcal{D}$ — произвольная подобласть (u, v) -плоскости. Множество $L \subset \tilde{\partial}\mathcal{D}$ назовем u -разветвленным, если найдутся как минимум две точки $w' = (u', v')$, $w'' = (u', v'') \in L$ такие, что отрезок

$$l = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u = u', v' < v < v''\} \text{ лежит в } \mathcal{D}$$

и отделяет от $\tilde{\partial}\mathcal{D} \setminus L$ некоторую подобласть $U \subset \mathcal{D}$, граница которой $\tilde{\partial}U \subset \bar{l} \cup L$.

К примеру, пусть $\mathcal{D}$ — круг и $\partial\mathcal{D}$ — ограничивающая его окружность. Тогда правая и левая полуокружности суть u -разветвленные, а верхняя и нижняя полуокружности не являются u -разветвленными.

Теорема. Предположим, что $\mathcal{D}$ есть подобласть полуплоскости $\{(u, v) : |u| < M\}$, где $0 < M < \infty$ — постоянная. Предположим, что $\Gamma \subset \tilde{\partial}\mathcal{D}$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty dt \left(\int_{\mathcal{D} \cap E_t} (a + d) \frac{ad - bc}{\Delta} |\nabla h| d\mathcal{H}^1(E_t) \right)^{-1} = \infty, \quad \Delta = ad - \left(\frac{b + c}{2} \right)^2,$$

и $L \subset \tilde{\partial}\mathcal{D}$ является u -разветвленной. Тогда не существует $W_{\text{loc}}^{1,2}$ решений $w = w(z)$ системы (1)–(2), осуществляющих гомеоморфное отображение D на $\mathcal{D}$ такое, что $w(\Gamma) \supset L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опирается на специальный принцип максимума для решений эллиптических уравнений с сильным вырождением вблизи границы, аналогичный соответствующему утверждению в [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев М. А. Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей // Матем. сб. 1947. Т. 21. С. 285–320.
2. Векун И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: ГИФМЛ, 1959. 628 с.
3. Суворов Г. Д. Обобщенный "принцип длины и площади" в теории отображений. Киев: Наукова думка, 1985. 280 с.
4. Миклюков Г. Д. Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения. Волгоград: изд-во ВолГУ, 2005. 273 с.
5. Martio O., Miklyukov V. M., and Vuorinen M. Some remarks on an existence problem for degenerate elliptic systems // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. V. 133, N 5. P. 1451–1458.
6. Martio O., Miklyukov V. M., and Vuorinen M. Functions monotone close to boundary // Tohoku Mathematical Journal. 2005. V. 57, N 4. P. 605–621.