Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 452–453

УДК 517.9

# ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ТИПА ХАРДИ

© М. Г. Насырова

nassm@mail.ru

*Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск*

Пусть на $\mathbb{R}_+ : = [0,\infty)$ заданы $\sigma$-конечные неотрицательные меры $\lambda$, $\mu$ и $\nu$. Для фиксированных параметра $p$, $1 < p < \infty$, и меры $\lambda$ лебегово пространство $L_{p,\lambda}$ определяется как множество всех $\lambda$-измеримых функций $f = f(x)$ на $\mathbb{R}_+$, для которых $\|f\|_{p,\lambda} := \left(\int_{[0,\infty)} |f(x)|^p \, d\lambda(x)\right)^{1/p} < \infty.$

Пусть функция $k_1(x,y)$ измерима по мере $\nu\times\lambda$, а $k_2(x,y)$ измерима по мере $\mu\times\nu$. Будем также считать, что функции $k_i(x,y)$, $i = 1,2$, удовлетворяют условию Ойнарова, т. е. для них выполнено

$$\begin{array}{ll} i) & k_i(x,y) \ge 0, \\ ii) & D^{-1}(k_i(x,z) + k_i(z,y)) \le k_i(x,y) \le D(k_i(x,z) + k_i(z,y)), \quad x \ge z \ge y \ge 0. \end{array}$$

Определим интегральные операторы

$$K_1 f(x) : = \int_{[0,x]} k_1(x,y) f(y) d\lambda(y) \quad \text{и} \quad K_2 f(x) : = \int_{[0,x]} k_2(x,y) f(y) d\nu(y),$$

а также композицию

$$Kf(x) : = K_2(K_1 f(x)) = \int_{[0,x]} k(x,y) f(y) d\lambda(y),$$

где новое ядро определено как

$$k(x,y) : = \int_{[y,x]} k_2(x,s) k_1(s,y) d\nu(s).$$

Оператор $K$ не удовлетворяет условию Ойнарова. Поэтому, используя характеризацию для операторов с ядрами Ойнарова (соответствующие результаты в весовом случае, полученные Р. Ойнаровым, В. Д. Степановым приведены, например, в [1]), доказана

**Теорема.** *Пусть* $1 < p \le q < \infty$. *Неравенство типа Харди*

$$\|Kf\|_{q,\mu} \le C \|f\|_{p,\lambda}$$

*выполнено для всех неотрицательных* $f \in L_{p,\lambda}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbb{A} < \infty$. *Более того,* $C \approx \mathbb{A}$, *где*

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_3 + \mathbb{A}_4;$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_1 \; &: = \; \sup_{t\ge 0} \left( \int_{[t,\infty)} k(x,t)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \left( \int_{[0,t]} d\lambda \right)^{1/p'}; \\
\mathbb{A}_2 \; &: = \; \sup_{t\ge 0} \left( \int_{[t,\infty)} \left( \int_{[t,x]} k_2(x,s) d\nu(s) \right)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \left( \int_{[0,t]} k_1(t,y)^{p'} d\lambda(y) \right)^{1/p'}; \\
\mathbb{A}_3 \; &: = \; \sup_{t\ge 0} \left( \int_{[t,\infty)} k_2(x,t)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \left( \int_{[0,t]} \left( \int_{[y,t]} k_1(s,y) d\nu(s) \right)^{p'} d\lambda(y) \right)^{1/p'}; \\
\mathbb{A}_4 \; &: = \; \sup_{t\ge 0} \left( \int_{[t,\infty)} d\mu \right)^{1/q} \left( \int_{[0,t]} k(t,y)^{p'} d\lambda(y) \right)^{1/p'}.
\end{aligned}$$

Также получены приложения этой теоремы к оценке нормы функции через норму ее $k$-й "весовой" производной и аналогичный результат для соотношения параметров $1 < q < p < \infty$ в случае абсолютно непрерывных мер. Представленная работа обощает результаты статьи [2].

Работа выполнена при поддержке гранта ДВО РАН № 06-III-A-01-003.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kufner A. and Persson L.-E.* Weighted inequalities of Hardy type // World Scientific. Singapore. 2003.
2. *Калыбай А. А.* Обобщение весового неравенства Харди для одного класса интегральных операторов // Сибирский митематический журнал. 2004. Т. 45, № 1. С. 119–133.
3. *Прохоров Д. В.* Неравенство Харди с тремя мерами // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2006. Т. 255. С. 233–245.