Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 454–455

УДК 517.982.2

ДИСКРЕТНАЯ НОРМА ДЛЯ СЛЕДА ПРОСТРАНСТВА W_p^2 В ЛИПШИЦЕВОЙ ОБЛАСТИ

© А. И. Парфёнов

pai79@sibmail.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $N = n+1$, $\omega = [0,1]^n$, $\mathring{\omega}$ — внутренность ω, и дана липшицева функция $f : \mathring{\omega} \to \mathbb{R}$. В липшицевой области

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^N \colon x' \in \mathring{\omega}, f(x') < x_N < f(x') + 2\right\}, \quad x = (x', x_N),$$

рассмотрим пространство Соболева $W_p^2(\Omega)$, где $1 < p < \infty$. Через $\mathrm{tr}\, v$ $(\in L_1(\mathring{\omega}))$ обозначим след функции $v \in W_p^2(\Omega)$ на поверхности $\{x_N = f(x')\}$, записанный через x'. Он определяется условием "$\mathrm{tr}\, v(\xi) = v(\xi^\uparrow)$ при $\xi \in \mathring{\omega}$ на функциях $v \in C(\overline{\Omega})$", где $\xi^\uparrow = (\xi, f(\xi)) \in \mathbb{R}^N$, и требованием непрерывности оператора tr.

Пространство $\mathrm{tr}\, W_p^2(\Omega)$ естественно нормировать так:

$$\|u\| = \inf_{v \in W_p^2 \colon \mathrm{tr}\, v = u} \|v\|_{W_p^2}.$$

Пусть $p > N/2$, так что $W_p^2(\Omega)$ и $\mathrm{tr}\, W_p^2(\Omega)$ состоят из непрерывных функций. Наша цель — представить эквивалентную норму в $\mathrm{tr}\, W_p^2(\Omega)$, принимающую в расчет значения функции только в "диадических" точках — точках с двоично-рациональными координатами. Для анизотропных пространств Бесова в кубе такая норма получена в [7].

Пусть $\mathcal{D}$ — семейство $\cup_{j=0}^\infty \mathcal{D}_j$ всех диадических кубов, где $\mathcal{D}_j$ состоит из 2^{jn} замкнутых кубов с ребром 2^{-j}, в объединении дающих куб $[0,1]^n$. Для $I \in \mathcal{D}$ через $I_\bullet$ обозначим тот угол, все координаты которого минимальны. Для числового семейства $\beta = (\beta_I)_{I \in \mathcal{D}}$ положим

$$\|\beta\|_I^p = \sum_{J \in \mathcal{D} \colon J \subset I,\, |J| = |I|/2} |\beta_I - \beta_J|^p + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n \colon (I_\bullet)_i \neq 1 - |I|} |\beta_I - \beta_{I + |I| e_i}|^p,$$

где $\{e_i\}$ — канонический базис в $\mathbb{R}^n$, а $I + |I| e_i$ — сдвиг куба I на вектор $|I| e_i$.

Пусть $u \in C(\omega)$. Для числа θ положим $u_\theta(\xi) = u(\xi) - \theta f(\xi)$,

$$E(u, I, \theta) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left|u_\theta(I_\bullet) - u_\theta(I_\bullet + |I|e_i) - u_\theta(I_\bullet + |I|e_j) + u_\theta(I_\bullet + |I|e_i + |I|e_j)\right|$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant n \colon (I_\bullet)_i \neq 1 - |I|} \left|u_\theta(I_\bullet) - 2u_\theta(I_\bullet + |I|e_i) + u_\theta(I_\bullet + 2|I|e_i)\right|,$$

$$\|u\|_{\text{дискр}} = \inf_\beta \left[|\beta_\omega| + \left(\sum_{I \in \mathcal{D}} \left\{|I|^{N-2p} E^p(u, I, \beta_I) + |I|^{N-p} \|\beta\|_I^p\right\}\right)^{1/p}\right],$$

где $\inf$ берётся по всем числовым семействам $\beta = (\beta_I)_{I \in \mathcal{D}}$.

Теорема 1. *При $p > N/2$ функция $u \in C(\omega)$ принадлежит $\mathrm{tr}\, W_p^2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\|u\|_{\text{дискр}} < \infty$. В этом случае*

$$\inf_{\substack{v \in W_p^2(\Omega)\colon \\ \mathrm{tr}\, v = u}} \|v\|_{W_p^2} \sim |u(0)| + \sum_{i=1}^n |u(e_i)| + \|u\|_{\text{дискр}}.$$

О следах на “плохих” множествах и нормах с участием $\mathcal{D}$ см. [1], [3], [4], [5], [6].

Скажем, что поверхность $\{x_N = f(x')\} = \{\xi^{\uparrow} : \xi \in \mathring{\omega}\}$ W_p^2*-распрямляема*, если пространство $\mathrm{tr}\, W_p^2(\Omega)$ равно обычному (для гладкой границы, $f = 0$) пространству следов $B_{p,p}^{2-1/p}(\mathring{\omega})$ с эквивалентностью норм. В неявном виде это понятие встретилось в [8]. Из пункта 1.1.7 в [2] получаем, что условие $f \in C^{1,1}(\omega)$ достаточно для распрямляемости. Выбор $v(x) = x_N$ показывает, что условие $f \in B_{p,p}^{2-1/p}(\mathring{\omega})$ необходимо для распрямляемости. Теперь из теоремы 1 легко выводится

Теорема 2. *При $p > N/2$ норма в $B_{p,p}^{2-1/p}(\mathring{\omega})$ эквивалентна норме*

$$|u(0)| + \sum_{i=1}^{n} |u(e_i)| + \left[\sum_{I \in \mathcal{D}} |I|^{N-2p} E^p(u, I, 0) \right]^{1/p}$$

(частный случай теоремы 1.1 в [7]) и имеем непрерывное вложение

$$B_{p,p}^{2-1/p}(\mathring{\omega}) \subset tr\, W_p^2(\Omega).$$

При $p > N$ равносильны следующие условия:

(i) *поверхность $\{\xi^{\uparrow} : \xi \in \mathring{\omega}\}$ W_p^2-распрямляема;*

(ii) $\sum_{I \in \mathcal{D}} |I|^{N-2p} E^p(f, I, 0) < \infty$*;*

(iii) $f \in B_{p,p}^{2-1/p}(\mathring{\omega})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иродова И. П.* Диадические пространства Бесова // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, № 3. С. 40–80.
2. *Мазья В. Г.* Пространства С.Л. Соболева. Л.: Ленингр. ун-т, 1985.
3. *Buffa A., Geymonat G.* On traces of functions in $W^{2,p}(\Omega)$ for Lipschitz domains in $\mathbb{R}^3$ // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2001. V. 332, N 8. P. 699–704.
4. *Geymonat G., Krasucki F.* On the existence of the Airy function in Lipschitz domains. Application to the traces of H^2 // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2000. V. 330, N 5. P. 355–360.
5. *Jonsson A.* Besov spaces on surfaces with singularities. // Manuscripta Math. 1991. V. 71, N 2. P. 121–152.
6. *Jonsson A., Wallin H.* Function spaces on subsets of $\mathbb{R}^n$ / Mathematical Reports. V. 2, Part 1. New York: Harwood Acad. Publ., 1984.
7. *Kamont A.* A discrete characterization of Besov spaces // Approx. Th. Appl. 1997. V. 13, N 2. P. 63–77.
8. *Marschall J.* The trace of Sobolev – Slobodeckij spaces on Lipschitz domains // Manuscripta Math. 1987. V. 58, N 1, 2. P. 47–65.