

УДК 517.962.22

РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ДВУМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА И. Н. ВЕКУА С ФИКСИРОВАННЫМ СИНГУЛЯРНЫМ И СВЕРХСИНГУЛЯРНЫМ ЯДРОМ

© Н. Раджабов

nusrat38@mail.ru

Таджикский государственный национальный университет, Душанбе, Таджикистан

Пусть $D = \{R_1 < |z| < R_2\}$ и $\Gamma_1 = \{|z| = R_1\}$, $\Gamma_2 = \{|z| = R_2\}$. В области D рассмотрим комплексное интегральное уравнение следующего вида

$$w(z) - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{(\lambda w(t) + \mu \overline{w(t)}) \exp(i\theta)}{(p - R_1)(R_2 - p)(t - z)} d\xi d\eta = f(z), \quad (1)$$

где λ, μ — заданные вещественные или комплексные числа, $\theta = \arg t$, $t = \xi + i\eta$, $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, $z = x + iy$, $f(z)$ — заданная функция, $w(z)$ — искомая функция.

Исследованию линейных интегральных уравнений вида (1) с фиксированными граничными сингулярными и сверхсингулярными ядрами посвящены работы [1–5].

В случае, когда λ, μ вещественные, $\lambda + \mu > 0$, $\lambda - \mu > 0$, имеет место следующее утверждение.

Теорема. Пусть в интегральном уравнении (1) $\lambda + \mu > 0$, $\lambda - \mu > 0$ (а) $\lambda > \mu > 0$; б) $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $|\mu| > |\lambda|$; в) $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\lambda < |\mu|$) $f(z) = f(r) = f_1(r) + if_2(r) \in C(\overline{D})$, $f_1(R_2) = 0$, $f_2(R_2) = 0$ с асимптотическим поведением $f_1(r) = o[(R_2 - r)^{\gamma_1}]$, $\gamma_1 > \frac{2(\lambda + \mu)}{R_2 - R_1}$; $f_2(r) = o[(R_2 - r)^{\gamma_2}]$, $\gamma_2 > \frac{2(\lambda - \mu)}{R_2 - R_1}$ при $r \rightarrow R_2$ и $f(R_1) = 0$.

Тогда для разрешимости интегрального уравнения (1) в классе функций $w(z) = w(r) \in C(\overline{D})$, обращающихся в нуль на Γ_1 и Γ_2 , необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_{R_1}^R \left(\frac{\tau - R_1}{R_2 - \tau} \right)^{\frac{2(\lambda + \mu)}{R_2 - R_1}} \frac{f_1(\tau) d\tau}{(\tau - R_1)(R_2 - \tau)} = 0, \quad \int_{R_1}^R \left(\frac{\tau - R_1}{R_2 - \tau} \right)^{\frac{2(\lambda - \mu)}{R_2 - R_1}} \frac{f_2(\tau) d\tau}{(\tau - R_1)(R_2 - \tau)} = 0, \quad (2)$$

где $R_1 < R < R_2$.

При выполнении условий (2) интегральное уравнение (1) имеет единственное решение, которое дается при помощи формулы

$$w(z) \equiv w(r) = w_1^0(r) + f(r) - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{K^+(r, \rho) f(\rho) + K^-(r, \rho) \overline{f(\rho)}}{(\rho - R_1)(R_2 - \rho)(t - z)} d\xi d\eta \equiv w_1^0(r) + M_1[f(r)],$$

где $w_2^0(r) = 0$ при $R_1 < r \leq R$ и $w_1^0(r) = \left(\frac{R_2 - r}{r - R_1} \right)^{\frac{2(\lambda + \mu)}{R_2 - R_1}} \cdot c_1 + i \left(\frac{R_2 - r}{r - R_1} \right)^{\frac{2(\lambda - \mu)}{R_2 - R_1}} \cdot c_2$ при $R \leq r < R_2$,

$$K^\pm(r, \rho) = (\lambda + \mu) \left[\left(\frac{\rho - R_1}{R_2 - \rho} \right) \left(\frac{R_2 - r}{r - R_1} \right) \right]^{\frac{2(\lambda + \mu)}{R_2 - R_1}} \pm (\lambda - \mu) \cdot \left[\left(\frac{\rho - R_1}{R_2 - \rho} \right) \left(\frac{R_2 - r}{r - R_1} \right) \right]^{\frac{2(\lambda - \mu)}{R_2 - R_1}},$$

$$c_1 = -(\lambda + \mu) \int_R^{R_2} \left(\frac{\rho - R_1}{R_2 - \rho} \right)^{\frac{2(\lambda + \mu)}{R_2 - R_1}} \frac{f_1(\rho) d\rho}{(\rho - R_1)(R_2 - \rho)},$$

$$c_2 = -(\lambda - \mu) \int_R^{R_2} \left(\frac{\rho - R_1}{R_2 - \rho} \right)^{\frac{2(\lambda - \mu)}{R_2 - R_1}} \frac{f_2(\rho) d\rho}{(\rho - R_1)(R_2 - \rho)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогичные результаты получены и в случаях, когда λ, μ вещественные и удовлетворяют условиям $\lambda + \mu < 0, \lambda - \mu < 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогичный результат получен и в случае, когда λ и μ вещественные кусочно постоянные, т. е. $\lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1$ для $R_1 \leq r < R$ и $\lambda = \lambda_2, \mu = \mu_2$ для $R < r \leq R, R_1 < r < R_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аналогичный результат получен и в случае, $\lambda + \mu > 0, \lambda - \mu < 0$ (а) $\lambda > 0, \mu > 0, \lambda < \mu$; б) $\lambda < 0, \mu > 0, \mu > |\lambda|$) и в случае $\lambda + \mu < 0, \lambda - \mu > 0$ ($\lambda < 0, \mu < 0, |\mu| < |\lambda|$).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Исследован случай, когда λ и μ комплексные числа.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В окрестности $D^+ = \{|z| < R\}$ найдено радиально-симметричное решение интегрального уравнения

$$w(z) - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{(\lambda w(t) + \overline{\mu w(t)}) \exp[i\theta] d\xi d\eta}{(R - \rho)^\alpha (t - z)} = f(z),$$

где λ, μ заданные комплексные числа, $\alpha > 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука. 1988. 510с.
2. Раджабов Н. Об одном методе решения интегрального уравнения типа И. Н. Векуа // Докл. АН Тадж. ССР. 1961. Т. 4. С. 3–7.
3. Раджабов Н. Явное решение одного класса двумерного комплексного интегрального уравнения второго рода с сингулярными и суперсингулярными ядрами на границе области // Материалы межд. науч. конф. "Дифференциальные уравнения и их приложения". Душанбе, 2006. С. 72–73.
4. Rajabov N. An explicit solution to a class of a second kind complex integral equation with singular and super-singular kernel // Functional Analytic and Complex Methods, their. Interactions, and Applications to Partial Differential Equations. World Scientific, 2001. P. 313–329.