Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 458–459

УДК 517.962.22

ОБ ОДНОЙ ОБЩЕМ ДВУХМЕРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ОСОБЕННОСТЬЮ И СИЛЬНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

© Л. Раджабова

lutfya62@mail.ru

Таджикский транспортный институт, Душанбе, Таджикистан

Через D обозначим прямоугольник $D = \{(x,y) : a < x < a_0, b_0 < y < b\}$. Соответственно обозначим $\Gamma_1 = \{a < x < a_0, y = b\}$, $\Gamma_2 = \{x = a, b_0 < y < b\}$. В области D рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$u(x,y) + \int_a^x \frac{K_1(x,y;t)u(t,y)}{(t-a)^\alpha}dt - \int_y^b \frac{K_2(x,y;s)u(x,s)}{(b-s)^\beta}ds +$$

$$\int_a^x \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int_y^b \frac{K_3(x,y;t,s)u(t,s)}{(b-s)^\beta}ds = f(x,y) \qquad (1)$$

где $\alpha = const > 0$, $\beta = const > 0$, $K_1(x,y;t)$, $K_2(x,y;s)$, $K_3(x,y;t,s)$ — заданные функции по своим переменным, $f(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2_{xy}(D)$ — заданная функция в $\overline{D}$.

К рассмотрению частных случаев интегрального уравнения (1) приводят задачи о нахождении непрерывных решений линейных гиперболических уравнений второго порядка с двумя сингулярными линиями.

Случай, когда в интегральном уравнении (1) ядра $K_1(x,y;t)$, $K_2(x,y;s)$, $K_3(x,y;t,s)$ являются постоянными числами, рассмотрен в [1, 2]. Случай, когда данные ядра являются функциями переменных интегрирования, рассмотрен в [3, 4].

В данной работе интегральное уравнение (1) исследовано в случае, когда $\alpha = 1$, $\beta > 1$, $\delta = -\lambda\mu$, где $\lambda = K_1(a,b;a)$, $\mu = K_2(a,b;b)$, $\delta = K_3(a,b;a,b)$

Ранее интегральное уравнение (1) было изучено в случаях, когда $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\delta = -\lambda\mu$ [5]; $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $\delta = -\lambda\mu$ [6].

В данной работе доказано, что для определенных значений λ, μ: $\lambda < 0$, $\mu > 0$; $\lambda < 0$, $\mu < 0$; $\lambda > 0$, $\mu > 0$ однородное интегральное уравнение (1) имеет бесконечное число линейно-независимых решений, для других значений λ, μ однородное интегральное уравнение (1) не имеет решения, кроме нулевого $(\lambda > 0, \mu < 0)$.

Неоднородное уравнение (1) для некоторых значений λ, μ всегда имеет решение и общее решение содержит четыре произвольные функции одного переменного (случай $\lambda < 0$, $\mu > 0$), при $\lambda < 0$, $\mu < 0$; $\lambda > 0$, $\mu > 0$ общее решение неоднородного уравнения содержит две произвольные функции одного переменного и в случае $\lambda > 0$, $\mu < 0$ неоднородное уравнение (1) имеет единственное решение.

Имеет место следующее утверждение:

Теорема. *Пусть в уравнении (1)* $\alpha = 1$, $\beta > 0$, $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $f(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2_{xy}(D)$, $f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$f(x,y) = o\left[(x-a)^{\delta_1}(b-y)^{\gamma_1}e^{-\mu\omega_b^\beta(y)}\right], \quad \delta_1 > |\lambda|, \quad \gamma_1 > \beta - 1.$$

Функции $K_1(x,y;t)$, $K_2(x,y;s)$, $K_3(x,y;t,s)$ *соответственно по своим переменным являются непрерывными для всех* $(x,y) \in \overline{D}$ *и* $(t,s) \in (\overline{D})$. *Кроме того, допустим что разности*

$K_1(x,y;t)-K_1(a,b;a)$, $K_2(x,y;s)-K_2(a,b;b)$, $K_3(x,y;t,s)-K_3(a,b;a,b)$ *при* $x\to a$, $y\to b$, $t\to a$, $s\to b$ *обращаются в нуль со следующими асимптотическими поведениями:*

$$K_1(x,y;t)-K_1(a,b;a)=o\left[(x-a)^{\delta_1}(b-y)^{\gamma_1}(t-a)^{\delta_2}e^{-\mu\omega_b^\beta(y)}\right],\quad \delta_1>|\lambda|,\quad \gamma_1>\beta-1,$$

$$K_2(x,y;s)-K_2(a,b;b)=o\left[(x-a)^{\delta_1}(b-y)^{\Gamma_1}(b-s)^{\gamma_2}(t-s)^{\gamma_2}e^{-\mu\omega_b^\beta(y)}\right],\quad \delta_2>0,\quad \gamma_2>\beta-1,$$

$$K_3(x,y;t,s)-K_3(a,b;a,b)=o\left[(x-a)^{\delta_1}(b-y)^{\gamma_1}(t-a)^{\delta_2}(b-s)^{\gamma_2}e^{-\mu\omega_b^\beta(y)}b^\beta(y)\right],$$

$$\omega_b^\beta(y)=\left[(\beta-1)(b-y)^{\beta-1}\right]^{-1}.$$

Тогда задача о нахождении общего решения двумерного интегрального уравнения (1) в классе $C(\overline{D})$ *эквивалентна задаче о нахождении решения двумерного интегрального уравнения Вольтерровского типа со слабыми особенностями следующего вида*

$$u(x,y)+\int_a^x\frac{N_1(x,y;t)u(t,y)}{t-a}dt+\int_y^b\frac{N_2(x,y;s)u(x,s)}{(b-s)^\beta}ds+\int_a^x\frac{dt}{t-a}\int_y^b\frac{N_3(x,y;t,s)u(t,s)}{(b-s)^\beta}ds=$$

$$P_{1,\beta}\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\psi_1(y),\psi_2(y),f(x,y)\right],$$

где $N_1(x,y;t)$, $N_2(x,y;s)$, $N_3(x,y;t,s)$ *— известные функции, непрерывные по переменным* (x,y) *и имеющие нуль порядка больше чем* $\varepsilon>0$ *по переменному* t *и нуль порядка больше чем* $\beta-1$ *по переменному* $s, P_{1,\beta}\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\psi_1(y),\psi_2(y),f(x,y)\right]$ *— известный интегральный оператор,* $\varphi_j(x)$, $\psi_j(x)$, $j=1,2$ *— произвольные функции точек* Γ_1 , Γ_2 *удовлетворяющие определеным условиям.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Раджабов Н., Раджабова Л.* Исследование одного класса двухмерного интегрального уравнения с фиксированными особыми ядрами, связанное с гиперболическим уравнением // Докл. АН России. 2003. Т. 391, № 1. С. 20–22.
2. *Rajabov N., Rajabova L., Ronto M.* On some two dimentional Volterra type linear integral equations with syper-singularity // Mathematical Notes. 2003. V. 4, № 1, P. 65–76.
3. *Раджабова Л.* К теории одного класса двухмерного немодельного интегрального уравнения вольтерровского типа со сверхсингулярными граничными линиями в ядре // Докл. АН России. 2005. Т. 400, № 1. С. 602–605.
4. *Раджабова Л.* Явное решение одного класса немодельного двухмерного интегрального уравнения вольтерровского типа с одной сингулярной и одной слабо–сингулярной линиями // Труды Межд. конф. "Дифференциальные уравненияс частными производными и родсвенные проблемы анализа и информатики". Т. II. Ташкент, 2004. С. 78–80.
5. *Раджабова Л.* Об одном общем интегральном уравнении типа Вольтерра с сингулярными линиями // Труды Межд. научно–теор.конф. по качественным исследованиям дифференциальных уравнений и их приложений, посвященной 10–летию РТСУ. Душанбе, 2005. С. 96–98.
6. *Раджабова Л.* Об одном общем интегральном уравнение типа Вольтерра со сверхсингулярными линиями // Вестник национального университета. Душанбе, 2005. № 2. С. 116–123.