

УДК 514.86

АППРОКСИМАЦИЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ КОНФОРМНО-ПЛОСКИХ МЕТРИК

© Е. Д. Родионов*, В. В. Славский**

*edr2002@mail.ru, **slavsky@uriit.ru

* Барнаульский государственный педагогический университет, Барнаул;

** Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск

При численном решении задач в механике или физике связанных с отысканием конформно-плоской метрики возникает задача о наиболее естественной (с геометрической точки зрения) интерполяции конформно-плоской метрики заданной в точках (узлах) на всю область. В работе предлагается метод интерполяции, основанный на конструкции изометричного вложения конформно-плоской метрики в изотропный конус пространства Лоренца. Данный метод позволяет легко контролировать кривизну и другие геометрические свойства получающейся метрики.

Пусть в некоторой области $D \subset R^3$ евклидова пространства R^3 имеется конформно-плоская метрика

$$ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)},$$

В работе [1] была введена одномерная секционная кривизна конформно-плоской метрики в направлении единичного вектора $\xi \in R^3$

$$K(\xi) = f(x) \frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{2} |\nabla f|^2$$

Риманова кривизна метрики двумерной площадки $\xi \wedge \eta$ равна $K(\xi \wedge \eta) = K(\xi) + K(\eta)$, где ξ, η — единичные ортогональные векторы в R^3 . При размерности $n \geq 3$ метрика имеет постоянную кривизну только в том случае, когда функция $f(x)$ имеет вид $f(x) = k(x-x_0)^2 + b$. Кривизна в этом случае равна $K(\xi \wedge \eta) = 4kb$. Фиксируем число $\varkappa$, обозначим через $\Xi_\varkappa$ семейство функций определенных в R^3 вида

$$\Xi_\varkappa = \{f(x) = k(x-x_0)^2 + b : b > 0, 4kb = \varkappa\}$$

Пусть в R^3 задана триангуляция Делоне некоторого выпуклого многогранника P , то есть указано множество вершин $V = \{a_i\}$, и множество симплексов $E = \{\sigma_k\}$, каждый симплекс $\sigma_k = \{a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, a_{k_4}\}$ определяется своим набором вершин, попарно симплексы не пересекаются, более того сфера описанная вокруг симплекса σ_k не содержит других вершин. Симплексы $E = \{\sigma_k\}$ образуют разбиение многогранника P .

Пусть на вершинах $V = \{a_i\}$ заданы значения положительной функции $f : V \rightarrow R^+$, $f(a_i) = f_i$. Обозначим через $F' = \langle V, E, f \rangle$ тройку, состоящую из триангуляции и значений функции в вершинах, для краткости назовем $F' = \langle V, E, f \rangle$ сеткой. Требуется продолжить функцию f с вершин сетки внутрь симплексов так, чтобы конформно-плоская метрика имела ограниченную кривизну.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Определим по данной сетке $F' = \langle V, E, f \rangle$ и числу $\varkappa$ функции

$$f_\varkappa^-(x) = \sup \{g(x) : g \in \Xi_\varkappa, \forall a_i \in V, g(a_i) \leq f_i\},$$

$$f_\varkappa^+(x) = \inf \{g(x) : g \in \Xi_\varkappa, \forall a_i \in V, g(a_i) \geq f_i\}$$

и назовем их соответственно *нижней* и *верхней* $\varkappa$ *оггибающей* данной сетки $F' = \langle V, E, f \rangle$.

Теорема. Для любой непустой сетки $F' = \langle V, E, f \rangle$ и числа $\varkappa > 0$ определены и всюду в R^3 конечны верхняя и нижняя огибающая $f_{\pm\varkappa}^{\pm}(x)$, принадлежащие классу $C^{1,1}(R^3 \setminus V)$, одномерная секционная кривизна соответствующих метрик ограничена $|K(\xi)| \leq \frac{\varkappa}{2}$ (в обобщенном смысле). Кроме того, выполняется

$$\begin{aligned} f_{\varkappa_1}^-(x) &\leq f_{\varkappa_2}^-(x) \quad \text{при } \varkappa_1 \leq \varkappa_2, \\ f_{\varkappa_1}^+(x) &\geq f_{\varkappa_2}^+(x) \quad \text{при } \varkappa_1 \leq \varkappa_2. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Вообще говоря, будут выполняться неравенства $f_{\varkappa}^+(a_i) \geq f_i$, $f_{-\varkappa}^-(a_i) \leq f_i$, если $a_i \in V$. Чтобы выполнялись равенства необходимо выполнение определенных условий на значения f_i в узлах сетки. В силу конечности сетки очевидно существует наименьшее $\varkappa_0 > 0$ такое, что при $\varkappa \geq \varkappa_0$ выполняется

$$f_{-\varkappa}^-(a_i) = f_{\varkappa}^+(a_i) = f_i \quad \forall a_i \in V.$$

Число $\varkappa_0$ назовем *абсолютной кривизной* сетки $F' = \langle V, E, f \rangle$. В работе указаны оценки абсолютной кривизной сетки в терминах хордового расстояния между вершинами сетки.

Работа поддержана грантами НШ-8526.2006.1, 06-01-81002-Бел_а "Инвариантные тензорные поля на однородных многообразиях".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. Геометрия. 2006. Т. 37. С. 36–43.