Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 462–463

УДК 517.51

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ СЛЕДОВ СОБОЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ В ОБЛАСТИ С ГЕЛЬДЕРОВЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

© А. С. Романов

asrom@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

В последние годы довольно активно изучаются различные функциональные классы соболевского типа на метрических пространствах. Помимо самостоятельного интереса получаемые результаты оказываются полезными и при изучении свойств классических пространств Соболева в нерегулярных евклидовых областях. В частности, использование взаимосвязи в областях с гельдеровыми особенностями между соболевскими пространствами W_p^1 и пространствами Хайлаша $M^{1,p}$ позволяет довольно просто получить условия, при которых оператор вложения пространства следов соболевских функций в пространства Лебега на границе области будет компактным [3].

Введенные П. Хайлашем [1] пространства функций, удовлетворяющих специального вида оценке липшицевого типа, могут быть определены на произвольном метрическом пространстве с борелевской мерой. Теоремы вложения для пространств Хайлаша $M^{1,p}$ с одной стороны, имеют довольно универсальный характер, с другой стороны, доказываются достаточно просто [1, 2]. В евклидовых областях с гладкой границей пространства Хайлаша $M^{1,p}$ совпадают с классическими пространствами Соболева W_p^1. В областях с нерегулярной границей эти классы функций могут оказаться и различными.

Для областей с гладкой границей пространство следов соболевских функций совпадает с соответствующим пространством Бесова. И хотя полного описания пространства следов соболевских функций на границе области в терминах пространств Хайлаша получить не удается, возникающие на границе пространства типа $M^{1,p}$ оказываются близкими к пространствам следов даже в случае областей с гельдеровыми особенностями. Это позволяет получить точные оценки на показатели суммируемости в соответствующих теоремах вложения.

Пусть $\lambda \geq 1$. Рассмотрим "нулевой"пик G_λ с гельдеровой особенностью в вершине

$$G_\lambda = \{x \in R^n \mid 0 < x_1 < 1, \ x_2^2 + \cdots + x_n^2 < x_1^{2\lambda}\}$$

и нулевой "гребень" $\Gamma_\lambda = G_\lambda \times (0,1) \subset R^{n+1}$. Через σ обозначим соответствующую поверхностную меру на границе области. Показатель $\Lambda = 1 + (n-1)\lambda$ в теоремах вложения для пика G_λ играет роль "размерности".

Теорема 1. *Пусть* $\dfrac{\Lambda}{\Lambda - \lambda + 1} < p < \infty$, *тогда оператор следа*

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \to L_q(\partial G_\lambda, \sigma)$$

является компактным при

1. $1 \leq q < p\dfrac{\Lambda - \lambda}{\Lambda - p}$, *когда* $\dfrac{\Lambda}{\Lambda - \lambda + 1} < p < \Lambda$;
2. $1 \leq q < \infty$, *когда* $p = \Lambda$;
3. $1 \leq q \leq \infty$, *когда* $p > \Lambda$.

Теорема 2. *Пусть* $\dfrac{\Lambda + 1}{\Lambda - \lambda + 2} < p < \infty$, *тогда оператор следа*

$$Tr : W_p^1(\Gamma_\lambda) \to L_q(\partial \Gamma_\lambda, \sigma)$$

является компактным при

1. $1 \leq q < p\dfrac{\Lambda + 1 - \lambda}{\Lambda + 1 - p}$, *когда* $\dfrac{\Lambda + 1}{\Lambda - \lambda + 2} < p < \Lambda + 1$;
2. $1 \leq q < \infty$, *когда* $p = \Lambda + 1$;
3. $1 \leq q \leq \infty$, *когда* $p > \Lambda + 1$.

Простые примеры показывают точность полученных в теоремах оценок на показатель суммируемости q.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00482-а), программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-8526.2006.1) и Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН 2006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hajlasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces // Potential Analysis. 1996. V. 5, N 4. P. 403–415.
2. *Hajlasz P., Koskela P.* Sobolev Met Poincare // Memoirs AMS, V. 145, N 688. P. 1–101.
3. *Романов А. С.* О следах соболевских функций на границе пика с гельдеровой особенностью // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 176–184.