

УДК 517.5; 517.956.225

ОДНО ПРИМЕНЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА БОННЕЗЕНА

© Р. Г. Салахудинов

Rustem.Salahudinov@ksu.ru

НИИ математики и механики КГУ, Казань

Введение. Пусть Ω — односвязная область на плоскости, $\text{dist}(z, \partial\Omega)$ — расстояние от точки z до границы $\partial\Omega$ области Ω , $R(z, \Omega)$ — конформный радиус Ω в точке $z \in \Omega$ и $P(\Omega)$ — жесткость кручения области Ω , т. е.

$$P(\Omega) := 2 \iint_{\Omega} v(x, y) dx dy,$$

где $v = v(x, y)$ — решение уравнения Пуассона $\Delta v = -2$ с граничным условием $v = 0$. Рассмотрим геометрические функционалы

$$I_p(\Omega) = \iint_{\Omega} \text{dist}^p(z, \partial\Omega) dx dy, \quad I_c(\Omega) = \iint_{\Omega} R^2(z, \Omega) dx dy,$$

являющиеся, соответственно, евклидовым моментом области Ω относительно её границы порядка p и конформным моментом инерции области Ω .

Ф. Г. Авхадиевым [1] было доказано, что для односвязных областей $\Omega \subset \mathbb{C}$ имеем $P(\Omega) \sim I_2(\Omega) \sim I_c(\Omega)$, а именно, справедлива цепочка неравенств

$$I_2(\Omega) \leq I_c(\Omega) \leq P(\Omega) \leq 4I_c(\Omega) \leq 64I_2(\Omega).$$

Одним из основных изопериметрических свойств для жесткости кручения является неравенство Сен-Венана – Поля

$$P(\Omega) \leq \frac{A^2(\Omega)}{2\pi},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда Ω — круг.

Л. Е. Пейн доказал (см. [2]), что в действительности справедливо более сильное неравенство

$$A^2(\Omega) - 2\pi P(\Omega) \geq (A(\Omega) - 2\pi v(\Omega))^2,$$

где $v(\Omega) = \max_{(x,y) \in \Omega} v(x, y)$. Равенство также достигается тогда и только тогда, когда Ω — круг.

Аналоги неравенства Сен-Венана – Поля для евклидовых моментов были доказаны в работе [3] и обобщены в [4]. Поэтому логичным является предположение о существовании аналога последнего неравенства для евклидовых моментов.

Основные результаты и следствия. Обозначим $\rho(\Omega) = \max_{z \in \Omega} \text{dist}(z, \partial\Omega)$.

Теорема 1. Пусть Ω — односвязная область конечной площади и $p \geq 0$. Тогда имеет место неравенство

$$I_p(\Omega) - \frac{2\pi \rho^{p+2}(\Omega)}{(p+1)(p+2)} \leq \frac{\rho^p(\Omega)}{(p+1)} (A(\Omega) - \pi \rho^2(\Omega)).$$

Случаи равенства в неравенстве совпадают со случаями равенства в неравенстве Боннезена (т. е. экстремальные области Ω являются выпуклыми и состоят из прямоугольника и двух полукругов).

Можно показать, что для многоугольников имеют место соотношения

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p+1}{\rho^{p+1}(\Omega)} \left(I_p(\Omega) - \frac{2\pi\rho^{p+2}(\Omega)}{(p+1)(p+2)} \right) = l(\rho(\Omega))$$

и

$$\lim_{p \rightarrow -1} \frac{p+1}{\rho^{p+1}(\Omega)} \left(I_p(\Omega) - \frac{2\pi\rho^{p+2}(\Omega)}{(p+1)(p+2)} \right) = l(\Omega) - 2\pi\rho(\Omega).$$

Тогда, как одно из следствий теорем 1 получаем следующую цепочку неравенств

$$l(\rho(\Omega)) \leq \frac{3}{\rho^3(\Omega)} \left(I_2(\Omega) - \frac{\pi\rho^4(\Omega)}{6} \right) \leq \frac{A(\Omega) - \pi\rho^2(\Omega)}{\rho(\Omega)} \leq l(\Omega) - 2\pi\rho(\Omega),$$

где $l(\mu)$ — длина линии уровня функции расстояния до границы области ($0 \leq \mu \leq \rho(\Omega)$) и $l(\Omega) = l(0)$. Последнее неравенство представляет собой неравенство Боннезена.

Последние соотношения позволяют предположить, что функция

$$f(p) := \frac{p+1}{\rho^{p+1}(\Omega)} \left(I_p(\Omega) - \frac{2\pi\rho^{p+2}(\Omega)}{(p+1)(p+2)} \right)$$

является невозрастающей для $p \in [-1, +\infty)$, предполагается, что $l(\Omega) < +\infty$. Такое свойство называется свойством изопериметрической монотонности. Это означает, что для фиксированных значений p_1 и p_2 с условием $p_1 < p_2$ имеет место неравенство $f(p_1) \geq f(p_2)$, причем равенство $f(p_1) = f(p_2)$ возможно лишь для областей, для которых $f(p) \equiv \text{const}$. Несколько функционалов с таким свойством были построены Дж. Хершем и К. Бэндл (см. [5]).

Мы доказываем изопериметрическую монотонность $f(p)$, а именно, следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть Ω односвязная область и $I_{p_0}(\Omega) < +\infty$ для некоторого $p_0 \in [-1, \infty)$.

Тогда

- 1) Если Ω не совпадает с экстремалью в неравенстве Боннезена, то $f(p)$ — строго убывающая функция от p .
- 2) Если Ω совпадает с одной из экстремалей в неравенстве Боннезена, то $f(p) \equiv \text{const}$, для $p \in [-1, +\infty)$.

Заметим, что существуют односвязные области Ω , для которых условие $I_{p_0}(\Omega) < +\infty$ не выполняется ни при каких p_0 . Примерами таких областей являются полуплоскость и полоса.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ грант № 05-01-00523.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авхадиев Ф. Г. Решение обобщенной задачи Сен-Венана // Матем. сборник. 1998. Т. 189, вып. 12. С. 3–12.
2. Payne L. E. Some inequalities in the torsion problem for multiply connected regions // Studies in Mathematical analysis and Related Topics: Essays in honor of G. Polya. Stanford University Press. Stanford, California. 1962. P. 270–280.
3. Avkhadiev F. G., Salahudinov R. G. Bilateral isoperimetric inequalities for boundary moments of plane domains // Lobachevskii J. of Mathematics. 2001. V. 9. P. 3–5 (URL: <http://ljm.ksu.ru>)
4. Salahudinov R. G. Isoperimetric inequalities for L^p -norms of the distance function to the boundary // Ученые записки КГУ. Серия: Физико-математические науки. 2006. Т. 148, кн. 2. С. 151–162.
5. Hersch J. Isoperimetric monotonicity — some properties and conjectures (connection between Isoperimetric inequalities) // SIAM J. Math. Anal. 1978. V. 9. P. 1126–1136.