

УДК 517.544

ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ТОЧЕК РАЗРЫВА КОЭФФИЦИЕНТОВ (СЛУЧАИ КОНЕЧНОГО И БЕСКОНЕЧНОГО ИНДЕКСОВ)

© Р. Б. Салимов, П. Л. Шабалин *

* Pavel.Shabalin@mail.ru

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань

Рассматривается задача о нахождении аналитической в верхней полуплоскости функции $F(z)$ по краевому условию

$$a(t)\operatorname{Re}F(t) - b(t)\operatorname{Im}F(t) = c(t),$$

которое выполняется на вещественной оси L всюду, кроме сгущающейся на бесконечности монотонной последовательности точек t_k , $t_k > 0$, в которых коэффициенты краевого условия $a(t)$, $b(t)$ и свободный член $c(t)$ имеют разрывы первого рода. Условимся считать, что вещественнозначные функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ непрерывны по Гельдеру на каждом интервале (t_k, t_{k+1}) включая концы, $c(t) = O(|t|^{-\gamma})$, при $t \rightarrow \infty$, $0 < \gamma < 1$, и $a(t)^2 + b(t)^2 \neq 0$. В этой задаче возможны две существенно различные ситуации: случаи конечного и бесконечного индекса, связанные со сходимостью либо расходимостью ряда, составленного из скачков и приращений на интервалах непрерывности функции $\nu(t) = \arg G(t)$, $G(t) = a(t) - ib(t)$.

1. Случай конечного индекса. В случае конечного индекса решение задачи будем искать в классе аналитических в верхней полуплоскости функций, имеющих интегрируемые особенности в точках t_k , и стремящихся к бесконечности порядка меньше единицы при $|z| \rightarrow \infty$, $y \rightarrow 0 + 0$ по некасательным путям. Ветвь $\nu(t) = \arg G(t)$ выберем последовательно на каждом интервале непрерывности коэффициентов так, чтобы скачок δ_k этой функции в точке t_k удовлетворял неравенству $0 \leq \delta_k < 2\pi$. Дополнительно предположив, что существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow -\infty} \nu(t) = \nu(-\infty)$, определим функцию $\varphi(t) = \nu(t) - \beta(t)\pi$, где $\beta(t)$ — целочисленная функция, принимающая значения β_k в интервалах (t_k, t_{k+1}) , $k = \overline{1, \infty}$, $\beta(t) = 0$ при $0 < t < t_1$ и $\beta(t) = -\kappa$ при $t < 0$. Число β_k выберем так, чтобы $0 \leq \varphi(t_k + 0) - \varphi(t_k - 0) < \pi$, число κ определим ниже так, чтобы скачок функции $\beta(t)$ в точке $t = 0$ был целым и чтобы величина $\kappa_\infty = [\varphi(-\infty) - \varphi(+\infty)]/\pi$ удовлетворяла неравенству $0 \leq \kappa_\infty < 1$. Обозначим символом κ_k скачок функции $\varphi(t)$ в точке t_k , m_k — приращение $\varphi(t)$ на интервале (t_k, t_{k+1}) и полагаем сходящимися следующие числовые ряды $\sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j = \kappa_+$, $\sum_{j=1}^{\infty} m_j = m$. Предположим,

что существует предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \varphi(+\infty)$, и, обозначая $\pi\beta_* = \nu(-\infty) - \nu(t_1 - 0)$, вычислим $\kappa_\infty = \beta_* + \kappa - \kappa_+ - m$, откуда находим $\kappa = -E(\beta_* - \kappa_+ - m)$, если $\beta_* - \kappa_+ - m$ — любое положительное или целое отрицательное число и $\kappa = -E(\beta_* - \kappa_+ - m) + 1$, если $\beta_* - \kappa_+ - m$ — нецелое отрицательное число, где через $E(p)$ обозначена целая часть числа p . Замечая, что $\varphi(0 - 0) - \varphi(0 + 0) = \kappa\pi$, число κ назовем индексом данной задачи в выбранном классе решений. Решение задачи проведем сведением к задаче Шварца методом аналитического выделения всех особенностей коэффициентов краевого условия, которое преобразуем к виду

$$\operatorname{Re} \frac{F(t)}{-iF_0(t)} = c_1(t), \quad c_1(t) = \frac{c(t)|P_+(t)|e^{K_0(t)}}{|G(t)||t + i|^{\kappa_\infty + \kappa_+ - \kappa_0}|t|^{\kappa_0} \cos[\beta(t)\pi]},$$

причем $c_1(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на вещественной оси и обращается в нуль в бесконечно удаленной точке, $F_0(z)$ находится с использованием формулы Шварца с непрерывной по Гельдеру плотностью $\phi(t)$, полученной из $\varphi(t) = \arg F_0(t) - \pi/2$ выделением особенностей в точках t_k , бесконечно удаленной точке и начале координат, $\kappa_0 = 0$ при четном κ и $\kappa_0 = -1$,

если κ — нечетное число, $P_+(z) = \prod_{k=1}^{\infty} [(1-z)/t_k]^{\kappa_k}$. Предполагаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/t_k$ сходится. Картина разрешимости рассмотренной задачи полностью аналогична случаю задачи Гильберта с конечным множеством точек разрыва коэффициентов [1].

2. Случай бесконечного индекса. Теперь рассмотрим случай, когда $\sum_{k=1}^{\infty} [\kappa_k + m_k]$ расходится. Неограниченное вращения вектора $G(t)$ приводит к обращению в бесконечность индекса рассматриваемой задачи. При этом рассматриваемая здесь задача существенно отличается от изученных в [2, 3] задач Гильберта с бесконечным индексом и непрерывными коэффициентами. Для изучения асимптотического поведения функции $P_+(z)$, введем считающую функцию $n_+^*(x) = 0$, $0 \leq x < t_1$, $n_+^*(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \kappa_j$, $t_{k-1} \leq x < t_k$, $k = \overline{2, \infty}$. Ограничимся рассмотрением случая $\lim_{x \rightarrow +\infty} n_+^*(x)x^{-\kappa^+} = \Delta_+$, где κ^+ — положительная постоянная, удовлетворяющая неравенству $\kappa^+ < 1$, $\Delta_+ > 0$. Для введенной выше функции $P_+(z)$ справедлива формула

$$\ln P_+(z) = \frac{\pi \Delta_+ e^{-i\kappa^+ \pi}}{\sin \pi \kappa^+} z^{\kappa^+} + I(z), \quad I(z) = -z \int_0^{+\infty} \frac{n_+^*(x) - \Delta_+ x^{\kappa^+}}{x(x-z)} dx.$$

Обозначим $p_k = n_+^*(t_k) - \Delta_+ (t_k)^{\kappa^+}$, $p_k > 0$, и числа p_k , t_k , $k = 1, 2, \dots$, будем подбирать так, чтобы выполнялись равенства $p_k = -n_+^*(t_k) + \Delta_+ (t_{k+1})^{\kappa^+}$. При сделанных здесь ограничениях на характеристики точек разрыва можно установить ограниченность и непрерывность по Гельдеру на вещественной оси функции $I(t)$.

Теперь, обозначив $\varphi_1(t) = \varphi(t) + \arg P_+(t)$, $\Gamma(z)$ — решение задачи Шварца для $\varphi_1(t)$, краевое условие соответствующей однородной задачи запишем так $\operatorname{Im} \{ i e^{-\Gamma^+(t)} F(t) P_+(t) \} = 0$. Отсюда с использованием принципа симметрии получим общее решение однородной задачи в классе функций с ограниченным произведением $|\Phi(z)| e^{\operatorname{Re} I(z)}$ вида

$$F(z) = i e^{\Gamma(z)} e^{-I(z)} \exp \left\{ -\pi \Delta_+ e^{-i\pi \kappa^+} z^{\kappa^+} / \sin(\pi \kappa^+) \right\} \Phi(z),$$

в котором $\Phi(z)$ — целая функция порядка $\rho_F \leq \kappa^+$, удовлетворяющая условию зеркальной симметрии относительно вещественной оси и некоторому ограничению скорости роста на вещественной оси. Изучены условия существования и числа решений.

Краевое условие неоднородной задачи запишем в виде

$$\operatorname{Re} \left[e^{-i\Gamma^+(t)} F(t) P_+(t) F_1(t) \right] = c_2(t), \quad c_2(t) = c(t) |P_+(t)| / \left\{ |G(t)| F_1(t) \cos(\beta(t)\pi) e^{\Gamma(t)} \right\},$$

где $\Gamma(t) = \operatorname{Re} \Gamma^+(t)$, $F_1(z)$ — специально построенная по выбранной последовательности нулей заданного порядка целая функция, позволяющая применять оператор Шварца для $c_2(t)$. Теперь общее решение неоднородной задачи представляется в виде суммы частного решения неоднородной задачи и общего решения однородной.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-00523).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Салимов Р. Б., Селезнев В. В. К решению краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами // Труды семинара по краевым задачам. № 16. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1979. С. 149–162.
2. Сандрыгайло И. Е. О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости // ИАН БССР. Сер. физ.-мат. н. 1974. № 6. С. 16–23.
3. Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. К решению задачи Гильберта с бесконечным индексом // Матем. заметки. 2003. Т. 73, № 5. С. 724–734.