Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 469–470

УДК 517.925.7

ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЕКУА – ЭРДЕЙИ – ЛАУНДЕСА

© С. М. Ситник

mathsms@yandex.ru

Воронежский институт МВД России, Воронеж

Определение 1. Пусть дана пара операторов (A, B). Оператор T называется оператором преобразования (ОП, transmutation), если выполняется соотношение

$$TB = BT. \tag{1}$$

Соотношение (1) называется иначе сплетающим свойством, тогда говорят, что ОП T сплетает операторы A и B. Для превращения (1) в строгое определение необходимо задать пространства или множества функций, на которых действуют операторы A, B, и, следовательно, T. Иногда в определение ОП закладывают и требование обратимости, что является желательным, но не обязательным свойством. В конкретных реализациях операторы A и B обычно являются дифференциальными, T — линейный оператор на стандартных пространствах.

Основы теории ОП изложены, например, в монографиях [1–10].

Важным классом являются ОП Векуа – Эрдейи – Лаундеса (ВЭЛ), которые осуществляют сдвиг по спектральному параметру [11–12].

Определение 2. Обобщённым оператором преобразования Векуа – Эрдейи – Лаундеса называется сплетающий оператор для пары $(A + \lambda_1, A + \lambda_2)$, где A — некоторый базовый оператор, λ_1, λ_2 — комплексные числа.

Иными словами

$$T(A + \lambda_1) = (A + \lambda_2)T.$$

ОП ВЭЛ были введены и изучены в работах И. Н. Векуа [13–16], А. Эрдейи [17–19] и Дж. С. Лаундеса [20–22]. В их работах рассматривались такие базовые дифференциальные операторы:

$$A = D^2 = \frac{d^2}{dx^2},\ A = B_\nu = D^2 + \frac{2\nu + 1}{x} D, A = x^\beta B_\nu\ .$$

Мы продолжаем рассмотрение тех же операторов.

Первый ОП ВЭЛ был построен Ильёй Несторовичем Векуа в виде

$$J_\lambda f(x) = f(x) - \int\limits_0^x t \frac{J_1(\lambda\sqrt{x^2 - t^2})}{\sqrt{x^2 - t^2}}\ f(t)\ dt, J_\lambda(D^2 + \lambda) = D^2 J_\lambda,$$

где $J_1(\cdot)$ — функция Бесселя. Такой ОП может быть использован, например, для представления решений телеграфного уравнения через решения волнового.

Для ОП ВЭЛ нами рассмотрены следующие вопросы.

1. Выделено семейство из восьми основных операторов ВЭЛ.
2. Изучены факторизации этих операторов через более простые: Фурье, Ханкеля, дробные интегралы Римана – Лиувилля, Эрдейи – Кобера и другие [23].
3. Изучены полугрупповые свойства введённых операторов ВЭЛ по параметру.
4. Найдены условия на произвольные интегральные операторы, обеспечивающие их принадлежность к классу ОП ВЭЛ.

5. Описаны общие методы построения ОП ВЭЛ из уже известных. На этом пути получены новые операторы ВЭЛ, ядра которых выражаются через гипергеометрические функции, а также функции Райта, Фокса, Гумберта, Кампе де Ферье и другие.

6. Построено взаимно однозначное соответствие между ОП ВЭЛ и ОП, сплетающими весовые операторы Бесселя:

$$T(x^2 B_\nu) = (x^2 B_\mu)T.$$

Подобные ОП изучались в [24]. Другие родственные классы ОП изучались автором в [25–27].

Таким образом, теория операторов преобразования Векуа – Эрдейи – Лаундеса является сформировавшимся разделом общей теории ОП с достаточно большим набором собственных результатов и важными применениями в теории уравнений в частных производных. Замечательно, что начало этой плодотворной тематики было заложено в трудах Ильи Несторовича Векуа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carroll R.* Transmutation and Operator Differential Equations // North Holland. 1979.
2. *Carroll R.* Transmutation, Scattering Theory and Special Functions // North Holland. 1982.
3. *Carroll R.* Transmutation Theory and Applications // North Holland. 1986.
4. *Gilbert R.* Constructive Methods for Elliptic Equations // Springer Lecture Notes Math. 1974. № 365.
5. *Gilbert R., Begehr H.* Transformations, Transmutations and Kernel Functions // Longman, Pitman. 1992.
6. *Марченко В. А.* Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля. Киев, 1972.
7. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.
8. *Фаге Д. К., Нагнибида Н. И.* Проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных операторов. Новосибирск: Наука, 1977.
9. *Левитан Б. М.* Теория операторов обобщённого сдвига. М.: Наука, 1973.
10. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.
11. *Ляховецкий Г. В., Ситник С. М.* Операторы преобразования Векуа – Эрдейи – Лаундеса. Препринт института автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН. Владивосток, 1994. 24 с.
12. *Lyahovetskii G. V., Sitnik S. M.* The Vekua–Erdelyi–Lowndes transmutations. Препринт института автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН. Владивосток, 1994. 14 с.
13. *Векуа И. Н.* О решениях уравнения $\Delta u + \lambda^2 u$ // Сообщения Акад. Наук Груз. ССР. 1942. Т. III, № 4. С. 307–314.
14. *Векуа И. Н.* Обращение одного интегрального преобразования и его некоторые применения // Сообщения Акад. Наук Груз. ССР. 1945. Т. VI, № 3. С. 177–183.
15. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений // М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
16. *Векуа И. Н.* Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1988.
17. *Erdelyi A.* Some applications of fractional integration // Boeing Sci. Res. Labor. Docum. Math. Note. 1963. № 316. 23 p.
18. *Erdelyi A.* An application of fractional integrals // J. Analyse Math. 1965. V. 14. P. 113–126.
19. *Erdelyi A.* On the Euler–Poisson–Darboux equation // J. Analyse Math. 1970. V. 23. P. 89–102.
20. *Lowndes J.S.* An application of some fractional integrals // Glasgow Math. J. 1979. V. 20, № 1. P. 35–41.
21. *Lowndes J. S.* On some generalizations of Riemann–Liouville and Weil fractional integrals and their applications // Glasgow Math. J. 1981. V. 22. № 2. P. 73–80.
22. *Lowndes J. S.* Cauchy problems for second order hyperbolic differential equations with constant coefficients // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1983. V. 26, № 3. P. 97–105.
23. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск.: Наука и техника. 1987.
24. *Килбас А. А., Сайго М., Жук В. А.* // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1640–1642.
25. *Ситник С. М.* Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана – Эрдейи // Докл. РАН. 1991. Т. 320, № 6. С. 1326–1330.
26. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Композиционный метод построения B-эллиптических, B-гиперболических и B-параболических операторов преобразования // Докл. РАН. 1994. Т. 337, № 3. С. 307–311.
27. *Ситник С. М.* Унитарность и ограниченность операторов Бушмана – Эрдейи нулевого порядка гладкости. Препринт ИАПУ ДВО РАН. Владивосток, 1990. 45 с.