Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 474–475

УДК 517.5

О СПЕКТРАХ, СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ И РЕЗОНАНСАХ ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ДВУХМАГНОННЫХ СИСТЕМ В ОДНОМЕРНОМ НЕГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОМ ФЕРРОМАГНЕТИКЕ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ БЛИЖАЙШИХ СОСЕДЕЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ СПИНА S

© С. М. Ташпулатов

toshpul@mail.ru, toshpul@rambler.ru

Институт ядерной физики АН РУз, Ташкент, Узбекистан

Рассматривается двухмагнонная система в одномерной негейзенберговской ферромагнетике со произвольным значением спина S с взаимодействием ближайших соседей и исследуется спектр, связанные состояние(СС) и резонансы системы.

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = -\sum_{n=1}^{2s}\sum_{m,\tau} J_n(\vec{S}_m\vec{S}_{m+\tau})^n, \tag{1}$$

и он действует в симметрическом Фоковском пространстве $\mathcal{H}$, где $J_n > 0, n = 1, 2, \ldots, 2s$, — параметры мультиполных обменных взаимодействий между ближайшими атомами решетки, а $\vec{S}_m$ — оператор атомного спина в узле m со значением спина S , а τ суммирует по ближайшим соседям, $S-$ значение спина, $S \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, ...\}$ —произвольное фиксированное число. Обозначим через $\mathcal{H}_2$ двухмагнонное инвариантное подпространство оператора H , $H_2 = H/_{\mathcal{H}_2}$. Оператор H_2 является ограниченный самосопряженный оператор. Оператор H_2 в квазиимпульсном представлении в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_2 = L_2(T^\nu \times T^\nu)$ действует по формуле:

$$(\tilde{H}_2 f)(x;y) = h(x;y)f(x;y) + \int\limits_{T^\nu} h_1(x;y;s)f(s;x+y-s)ds, \tag{2}$$

где $h(x;y) = A\sum_{k=1}^{\nu}[1 - \cos\frac{x_k+y_k}{2}\cos\frac{x_k-y_k}{2}]$,

$$\begin{aligned} h_1(x;y;s) &= B\sum_{k=1}^{\nu}[\cos\frac{x_k-y_k}{2} - \cos\frac{x_k+y_k}{2}]\cos(\frac{x_k+y_k}{2} - s_k) \\ &+ C\sum_{k=1}^{\nu}[1 + \cos(x_k+y_k) - 2\cos\frac{x_k+y_k}{2}\cos\frac{x_k-y_k}{2}], \end{aligned}$$

Здесь A, B, C — коэффициенты зависящие от параметров $J_k, k = 1, 2, ..., 2s,$ и значением спина S, т. е. $A = A(J_1, J_2, ..., J_{2s}, S), B + B(J_1, J_2, ..., J_{2s}, s), C = C(J_1, J_2, ..., J_{2s}, S)$ и T^ν - ν-мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda : \lambda(T^\nu) = 1$. Нами найдены явные формулы для коэффициента $A : A = 4[2sJ_1 - (2s)^2 J_2 + (2s)^3 J_3 - ... + (-1)^{2s+1}(2s)^{2s}J_{2s}]$, $B = J_1 + (4s^2 - 6s + 1)J_2 + (1 - 10s + 32s^2 - 24s^3)J_3 + (112s^4 - 160s^3 + 72s^2 - 14s + 1)J_4 +$

$(-480s^5+786s^4-448s^3+128s^2-18s+1)J_5+...,\ C=(s-2s^2)J_2+(12s^3-8s^2+s)J_3+(56s^4-48s^3+12s^2-s)J_4-(240s^5-256s^4+96s^3-16s^2+s)J_5+....$

Нами исследованы спектр, СС и резонансы оператора $\tilde{H}_2$. Фиксируя полный квазиимпульс системы и его двухмагнонное подсистемы $x+y=\Lambda$, мы можем расслоить пространство $\tilde{\mathcal{H}}_2$ и оператор $\tilde{H}_2$ в прямой интеграл .

Ясно, что непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$ не зависит от функций $h_{1\Lambda}(x;t)$ и заполняет весь отрезок $[m^\nu_\Lambda; M^\nu_\Lambda]=\mathrm{Im}\ h_\Lambda(x)$, где $m^\nu_\Lambda=\min_{x\in T^\nu} h_\Lambda(x), M^\nu_\Lambda=\max_{x\in T^\nu} h_\Lambda(x)$.

Рассмотрим оператор $(K_\Lambda(z)f_\Lambda)(x)=\int_T \frac{h_{1\Lambda}(x;t)}{h_\Lambda(t)-z}f_\Lambda(t)dt$. Он является вполне непрерывным оператором в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ для значений z, лежащих вне множества $[m^\nu_\Lambda; M^\nu_\Lambda]$. Обозначим через $\Delta_\Lambda(z)$ определитель Фредгольма оператора $E_\Lambda+K_\Lambda(z)$, где E_Λ — единичный оператор в пространстве $\mathcal{H}_{2\Lambda}$.

Лемма. *Число $z=z_0$ является собственным значением оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$ тогда и только тогда, когда оно является нулем функции $\Delta_\Lambda(z)$.*

Обозначим через $\Delta^\star_\Lambda(z)$ аналитическое продолжение функции $\Delta_\Lambda(z)$ по любой кривой, лежащее в $V'_\varepsilon(m^\nu_\Lambda)$, где $V'_\varepsilon(m^\nu_\Lambda)=\{z\in C: |z-m^\nu_\Lambda|<\varepsilon\}$. Нули функции $\Delta^\star_\Lambda(z)$, не совпадающие с нулями исходной функции $\Delta_\Lambda(z)$, назовем резонансами оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$; резонансы, лежащие в области $V^+=\{z\in V'_\varepsilon(m^\nu_\Lambda), Rez\geq m^\nu_\Lambda\}$, называются физическими резонансами.

Теорема 1. *Пусть $A=0$. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет единственное СС Ψ со значением энергии $z=-2C-8s(2s-1)B\sum_{i=1}^\nu \cos^2\frac{\Lambda}{2}$, лежащим вне области непрерывного спектра и не имеет резонансов.*

Доказательство. Если $A=0$, тогда $h_\Lambda(s)\equiv 0$ и функция $\Delta_\Lambda(z)$ имеет вид $\Delta_\Lambda(z)=1+\frac{2C}{z}+\frac{8s(2s-1)B\sum_{k=1}^\nu \cos^2 \frac{\Lambda}{2}}{z}$. Теперь решая уравнение $\Delta_\Lambda(z)=0$, получаем доказательство теоремы.

Теорема 2. *Если $\Lambda=\pi$ и $B\neq 0$, тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет единственное СС Ψ со значением энергии равным $z=8sA-2B$, лежащим вне области непрерывного спектра и не имеет резонансов.*

Доказательство. Если $\Lambda=\pi$ и $B\neq 0$, то функция $\Delta_\Lambda(z)$ имеет вид $\Delta_\Lambda(z)=1-\frac{2B}{8sA-z}$. Теперь решая уравнение $\Delta_\Lambda(z)=0$, получаем доказательство теоремы.

Теорема 3. *Если $B=0$, тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет не более одного СС со значением энергии, лежащим вне области непрерывного спектра и имеет не более два резонанса, т. е., в этом случае общие количество резонансов и СС равны двум.*

Доказательство. Если $B=0$, тогда $A=-(4s^2-4s+1)C$ и

$\Delta_\Lambda(z)=1-4s(2s-1)C\int_T \frac{1+\cos\Lambda-2\cos\frac{\Lambda}{2}\cos(\frac{\Lambda}{2}-s)}{h_\Lambda(s)-z}ds$. Интеграл вычисляется в квадратурах. Вычисляя значение интеграла и исследуя уравнение $\Delta_\Lambda(z)=0$ вне области непрерывного спектра, мы немедленно получаем доказательство теоремы.

Кроме того, показано что, спектр и СС системы при $s=1/2$ и при $s>1/2$ качественно отличаются друг от друга. Качественная картина изменения энергетического спектра системы для целых и полуцелых значениях спина, а также для четных и нечетных значениях спина, одинакова.