УДК 517.5

О СУЩЕСТВЕННЫХ И ДИСКРЕТНЫХ СПЕКТРАХ ОДНОГО ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА ТРЕХМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ

© С. М. Ташпулатов

toshpul@mail.ru, toshpul@rambler.ru

Институт ядерной физики АН РУз, Ташкент, Узбекистан

Рассматривается двухмагنونная система в трехмерной изотропной примесной негейзенберговской ферромагнитной модели с произвольным значением спина S с взаимодействием ближайших соседей и исследуется структура существенного спектра системы и качественно исследуется дискретный спектр системы.

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = - \sum_{m, \tau} \sum_{n=1}^{2s} J_n (\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau})^n - \sum_{\tau} \sum_{n=1}^{2s} (J_n^0 - J_n) (\vec{S}_0 \vec{S}_{\tau})^n, \quad (1)$$

и он действует в симметрическом Фоковском пространстве $\mathcal{H}$, где $J_n > 0$ и J_n^0 параметры мультипольного обменного взаимодействия между ближайшими атомами и между атома и примесями соответственно, а $\vec{S}_m$ — оператор атомного спина в узле m со значением спина S , а τ суммирует по ближайшим соседям.

Обозначим через $\mathcal{H}_2$ двухмагنونное инвариантное подпространство оператора H , $H_2 = H/\mathcal{H}_2$. Оператор H_2 является ограниченный самосопряженный оператор и он в квазиимпульсном представлении в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_2 = L_2(T^\nu \times T^\nu)$ действует по формуле:

$$(\tilde{H}_2 f)(x; y) = h(x; y) f(x; y) + \int_{T^\nu} h_1(x; y; s) f(s; x + y - s) ds + D \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} h_2(x; y; s; t) f(s; t) ds dt - 2 \sum_{k=1}^{2s} (-2s)^k (J_k^0 - J_k) \int_{T^\nu} h_3(x; s) f(s; y) ds - 2 \sum_{k=1}^{2s} (-2s)^k (J_k^0 - J_k) \int_{T^\nu} h_4(y; t) f(x; t) dt, \quad (2)$$

где $h(x; y) = 4 \sum_{n=1}^{2s} (-1)^{n+1} (2s)^n \sum_{k=1}^{\nu} [1 - \cos \frac{x_k + y_k}{2} \cos \frac{x_k - y_k}{2}]$,

$$h_1(x; y; s) = B \sum_{k=1}^{\nu} [\cos \frac{x_k - y_k}{2} - \cos \frac{x_k + y_k}{2}] \cos(\frac{x_k + y_k}{2} - s_k) + C \sum_{k=1}^{\nu} [1 + \cos(x_k + y_k) - 2 \cos \frac{x_k + y_k}{2} \cos \frac{x_k - y_k}{2}].$$

Здесь $B = J_1 + (4s^2 - 6s + 1)J_2 + (1 - 10s + 32s^2 - 24s^3)J_3 + (112s^4 - 160s^3 + 72s^2 - 14s + 1)J_4 + (-480s^5 + 786s^4 - 448s^3 + 128s^2 - 18s + 1)J_5 + \dots$, $C = (s - 2s^2)J_2 + (12s^3 - 8s^2 + s)J_3 + (56s^4 - 48s^3 + 12s^2 - s)J_4 - (240s^5 - 256s^4 + 96s^3 - 16s^2 + s)J_5 + \dots$, $D = D(J_1; J_2; \dots; J_{2s}; J_1^0; J_2^0; \dots; J_{2s}^0; s)$,

$h_2(x; y; s; t)$ — конкретная 2π -периодическая аналитическая функция, $h_3(x, s) = \nu + \sum_{i=1}^{\nu} [\cos(x_i - s_i) - \cos x_i - \cos s_i]$, $h_4(y, t) = \nu + \sum_{i=1}^{\nu} [\cos(y_i - t_i) - \cos t_i - \cos y_i]$, $x, y, s, t \in T^{\nu}$.

Гамильтониан одномагнитной системы имеет вид (1). Через $\mathcal{H}_1$ обозначим одномагнитное подпространство оператора H , а $H_1 = H/\mathcal{H}_1$. Оператор H_1 в квазиимпульсном представлении в пространстве $\mathcal{H}_1$ действует по формуле

$$(\tilde{H}_1 f)(x) = p(s)h(x)f(x) + q(s) \int_{T^{\nu}} h_1(x; t)f(t)dt, \quad (3)$$

где $h(x) = \nu - \sum_{i=1}^{\nu} \cos x_i$, а $h_1(x; t) = \nu + \sum_{i=1}^{\nu} [\cos(x_i - t_i) - \cos x_i - \cos t_i]$. Здесь $p(s) = -2 \sum_{k=1}^{2s} (-2s)^k J_k$, $q(s) = -2 \sum_{k=1}^{2s} (-2s)^k (J_k^0 - J_k)$. Обозначим через Ω множество значений всех пар $\omega = (p(s); q(s))$ и при $\nu = 3$ введем его подмножества $Q_1 - Q_{16}$ (см. в [1]).

Видно, что оператор $\tilde{H}_2$ можно представлять в виде:

$$\begin{aligned} (\tilde{H}_2 f)(x; y) &= (\tilde{H}_1 f)(x) \otimes I + I \otimes (\tilde{H}_1 f)(y) \\ &+ \int_{T^{\nu}} h_1(x; y; s)f(s; x + y - s)ds + \int_{T^{\nu}} \int_{T^{\nu}} h_2(x; y; s; t)f(s; t)dsdt. \end{aligned} \quad (4)$$

Фиксируя полный квазиимпульс системы и его двухмагнитные подсистемы $x + y = \Lambda$, мы можем расслоить пространство $\mathcal{H}_2$ и оператор $\tilde{H}_2$ в прямой интеграл, после того интегральные операторы с ядрами $h_1(x; y; s)$ и $h_2(x; y; s; t)$ становятся компактными операторами в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$. Теперь используя известными результатами о спектрах оператора $\tilde{H}_1$ описываем существенный спектр оператора $K = \tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$. Известно, что $\sigma(K) = \{\lambda + \mu : \lambda \in \sigma(\tilde{H}_1), \mu \in \sigma(\tilde{H}_1)\}$.

Теорема 1. Если $\Omega \in Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$, тогда существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из единственного отрезка $\sigma_{ess.}(\tilde{H}_2) = [0; 12p(s)]$ или $\sigma_{ess.}\tilde{H}_2 = [12p(s); 0]$, а дискретный спектр оператора конечен.

Теорема 2. Если $\Omega \in Q_5 \cup Q_6, (\Omega \in Q_7 \cup Q_8)$, тогда существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из двух сегментов: $\sigma_{ess.}(\tilde{H}_2) = [0; 12p(s)] \cup [z_1; z_1 + 6p(s)]$. Дискретный спектр оператора левее (правее) существенного спектра конечен.

Теорема 3. Если $\Omega \in Q_9 \cup Q_{10}, (\Omega \in Q_{11} \cup Q_{12})$, тогда существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из трех сегментов: $\sigma_{ess.}(\tilde{H}_2) = [0; 12p(s)] \cup [z_1; 6p(s) + z_1] \cup [z_2; 6p(s) + z_2]$. Дискретный спектр оператора левее (правее) существенного спектра конечен.

Теорема 4. Если $\Omega \in Q_{13} \cup Q_{14}, (\Omega \in Q_{15} \cup Q_{16})$, тогда существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из четырех сегментов: $\sigma_{ess.}(\tilde{H}_2) = [0; 12p(s)] \cup [z_1; z_1 + 6p(s)] \cup [z_2; z_2 + 6p(s)] \cup [z_3; z_3 + 6p(s)]$. Дискретный спектр оператора $\tilde{H}_2$ левее (правее) существенного спектра конечен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Таштулатов С. М. Одномагнитные системы в изотропной негейзенберговской ферромагнитной примесной модели // ТМФ. 2005. Т. 142, № 1. С. 83-92.