УДК 513.03+517.944

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ И. Н. ВЕКУА МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

© Е. В. Тюриков

lucy@jeo.ru

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Постановка рассматриваемой ниже задачи восходит к известной работе И. Н. Векуа [1] по теории обобщенных аналитических функций и ее приложению к граничным задачам безмоментного напряженного состояния выпуклой упругой оболочки с заданным на границе ее срединной поверхности вектором касательного или нормального усилий. Там же поставлен вопрос (*смешанная* граничная задача) о возможности реализации безмоментного напряженного состояния равновесия при условии, что на какой-либо части границы задано только касательное, а на другой части — только нормальное усилия (см. также [2, 3]). Смешанная граничная задача для сферической оболочки, край срединной поверхности которой состоит из конечного числа плоских гладких дуг (*сферический купол*), поставлена А. Л. Гольденвейзером в [4].

Пусть S_ν, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{2n})$ — строго внутренняя часть замкнутой выпуклой поверхности класса регулярности $W^{3,p}$, $p > 2$, с кусочно-гладким краем $L = \bigcup\limits_{j=1}^{2n} L_j$, состоящим из конечного числа дуг L_j класса регулярности $C^{1,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, и содержащим $2n$ угловых точек c_j с внутренними углами $\nu_j \pi$ ($0 < \nu_j < 2$) соответственно, образованными векторами $\overline{s}_j^{(1)}$, $\overline{s}_j^{(2)}$ с началом в точке c_j ($j = 1, \ldots, 2n$) и задающими направления дуг, сходящихся в этой точке. Рассматривается вспомогательная задача (задача B): существуют ли бесконечно малые (б. м.) изгибания поверхности S_ν, совместимые с граничным условием

$$\delta k_n = \sigma_i(s) \quad \text{на} \ \ L_{2i-1} \quad (i = 1, \ldots, n); \quad \delta k_g = \sigma_j \quad \text{на} \ \ L_{2j} \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где $\sigma_i(s)$ — наперед заданные гельдеровы функции, s — натуральный параметр, δk_n и $\delta \tau_g$ — вариации нормальной кривизны и геодезического кручения поверхности S_ν в направлении края, L_k ($k = 1, \ldots, 2n-1$) — дуга с началом и концом в точках c_k и c_{k+1} соответственно, а L_{2n} — дуга с началом и концом в точках c_{2n} и c_1. В целях упрощения изложения ограничимся рассмотрением *канонической* задачи B_0, полагая, что в каждой из точек c_j выполняется одно из следующих условий:

1°. направление одного из векторов $\overline{s}_j^{(k)}$ ($k = 1, 2$) совпадает с главным направлением на поверхности S_ν в этой точке;

2°. в направлении одного из векторов $\overline{s}_j^{(k)}$ ($k = 1, 2$) геодезическое кручение поверхности S_ν в точке c_j принимает наибольшее значение.

Для формулировки результата введем классификацию угловых точек, по которой каждую точку можно отнести к одному из пяти типов, а именно: точка c_j ($1 < j \leqslant 2n$) есть точка k-го типа, если $0 < \nu_j \leqslant 1/4$ при $k = 1$; $(2k-3)/4 < \nu_j \leqslant (2k-1)/4$ при $k = 2, 3, 4$; $7/4 < \nu_j < 2$ при $k = 5$. Обозначим через $N^{(k)}$ ($k = 1, \ldots, 5$; $\sum\limits_{k=1}^{5} N^{(k)} = 2n$) число угловых точек k-го типа. Имеет место

Теорема 1. *Пусть S_ν — заданная выше поверхность класса регулярности $W^{3,p}$, $p > 2\theta_0$, $\theta_0 = \max\{1, \omega(\nu)\}$, где набор $\omega(\nu) \equiv (\theta_1, \ldots, \theta_{2n})$ вполне определен выбором точек c_j и направлений $\overline{s}_j^{(1)}$, $\overline{s}_j^{(2)}$ на S_ν. Если*

$$N = \sum_{k=1}^{5} (5 - 2k) N^{(k)} \geqslant 6,$$

то поверхность S_ν *допускает* $(N/2-3)$ *-параметрическое семейство нетривиальных б. м. изгибаний класса регулярности* $W^{1,q}$, $2 < q < \frac{2p}{2+p(1-1/\theta_0)}$, *совместимых с условием (1), в котором* $\sigma_i \not\equiv 0$ *хотя бы на одной из дуг* L_i. *Если при этом функция* σ, *определенная на* L *равенствами (1), удовлетворяет дополнительным условиям точечного типа* $\sigma(c_j) = 0$ $(j = 1, \dots, 2n)$, *то б. м. изгибания непрерывны в* $S_\nu \cup L$.

Справедлива также

Теорема 2. *Если* $N > 6$, *то поверхность* S_ν *при условии стационарности нормальной кривизны на* L_{2i-1} *и геодезического кручения на* L_{2i} $(i = 1, \dots, n)$ *(т. е. при условии* $\sigma \equiv 0$ *на* L*) допускает точно* $N/2-3$ *линейно-независимых нетривиальных б. м. изгибаний указанного класса, и является жесткой в том же классе, если* $N \leqslant 6$.

Доказательство теорем 1, 2 опирается на результаты работы [5]. Используя метод И. Н. Векуа [1–3] и теоремы 1, 2, получаем следующий результат: если V — тонкая упругая оболочка со срединной поверхностью S_ν, для которой $N > 6$, а касательные усилия на дугах L_{2j-1} и нормальные усилия на дугах L_{2j} $(j = 1, \dots, n)$ соответственно равны нулю, то в оболочке V безмоментное напряженное состояние равновесия реализуется при любом распределении нормальных усилий на L_{2j-1} и касательных усилий на L_{2j} $(j = 1, \dots, n)$.

Для формулировки результата в общем случае (в угловых точках c_j, $1 \leqslant j \leqslant 2n$, ни одно из условий 1°, 2° не выполняется) вводится более тонкая классификация угловых точек края. По этой классификации каждую угловую точку также можно отнести к одному из пяти типов, однако тип угловой точки c_j в этом случае определяется внутренним углом $\nu_j\pi$ и направлениями дуг границы L, сходящихся в этой точке. При этом остаются справедливы теоремы 1, 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И. Н.* Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек // Мат. сб. 1952. Т. 31, № 2. С. 217–314.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
3. *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Физматгиз, 1982.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Физматгиз, 1976.
5. *Тюриков Е. В.* Краевые задачи теории б.м. изгибаний поверхностей // Мат. сб. 1977. № 3 (7). С. 445–462.