Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 480–481

УДК 517.544

К ТЕОРИИ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОГО СЛУЧАЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА В КЛАССЕ ГИПЕРФУНКЦИЙ

© Т. М. Урбанович

UrbanovichTM@gmail.com

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

В классической постановке задачи Римана (см., например, [1,2]) отыскиваются функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, аналитические внутри и вне замкнутой кривой $\Gamma \in \mathbb{C}$, соответственно, предельные значения которых удовлетворяют краевому условию

$$\Phi^+(x) = G(x)\Phi^-(x) + g(x), \ x \in \Gamma, \tag{1}$$

где $G(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции, для которых выполнено некоторое дополнительное условие гладкости.

При решении конкретных прикладных задач возникает необходимость исследования задачи (1) в предположении, что $g(x)$ является обобщённой функцией. Постановка краевой задачи Римана в пространстве обобщённых функций принадлежит, по-видимому, Парасюку (см., например, [7]), а именно, в [3], решая парные уравнения типа свёртки, он пришёл к задаче Римана на прямой в одном классе обобщённых функций. Ранее Кёте [4] рассматривал частный случай задачи Римана — задачу о представлении обобщённой функции в виде разности предельных значений функций, аналитических внутри и вне аналитической кривой. Беркович [5] пришёл к краевой задаче Римана в пространстве обобщённых функций в связи с решением бесконечной системы алгебраических уравнений с разностным индексом в случае быстрого роста свободного члена.

Краевая задача Римана в классе обобщённых функций изучалась многими авторами. Черский [6] предложил рассматривать Φ^+ и Φ^- как некоторые операторы, действующие в пространстве обобщённых функций, и на этой основе исследовал соответствующую задачу Римана. Рогожину [7-9] удалось решить в замкнутом виде краевую задачу Римана, свободный член которой является обобщённой функцией, и истолковать решение как предельное значение кусочно-аналитической функции. При этом использовалась теория обобщённых функций, определённых на основном пространстве, состоящем из бесконечно дифференцируемых функций точек достаточно гладкого контура.

В монографии [10] приводится постановка в классах гиперфункций краевой задачи Гильберта, тесно связанной с задачей Римана. Однако, полное исследование задачи Римана (в частности, в исключительном случае) в классах гиперфункций далеко от завершения и представляет самостоятельный интерес.

В докладе излагается решение в классе гиперфункций $\{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ (см.[10]) краевой задачи Римана в исключительном случае (см. [2, с. 130-137])

$$\Phi^+(x) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\alpha_j}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(x-b_k)^{\beta_k}} G_0(x)\Phi^-(x) + g(x), \ \ -\infty < x < +\infty, \tag{2}$$

где $a_1 < \cdots < a_m, \ b_1 < \cdots < b_n, \ a_j \neq b_k; \ \alpha_j, \beta_k \in \mathbb{N}$, $G_0(x)$ — функция, удовлетворяющая условию Гёльдера и не обращающаяся в нуль на прямой.

Под решением задачи (2) в классе гиперфункций понимается гиперфункция $\{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$, для которой равенство (2) выполняется во всех тех точках $x \in \mathbb{R}$, в которых предельные значения $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$ существуют.

Решение задачи (2) в классе гиперфункций определяется выбором пространства решений (см. [11, с. 133]) и записывается через комплексные аналоги δ-функции и её производных (см.[12]).

Общее решение задачи (2) в классе гиперфункций, исчезающих на бесконечности, имеет вид

$$\{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\} = \left\{ X_0^+(z) \cdot \left(g_1^+(z) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=0}^{\beta_k - 1} B_{kp} \delta^{(p)}(z - b_k) \right), \right.$$

$$X_0^-(z) \cdot \left(g_1^-(z) \cdot \frac{(-i)^m i^n}{2^{m+n} \prod\limits_{j=1}^{m} \sin \pi\alpha_j \prod\limits_{k=1}^{n} \sin \pi\beta_k} \cdot \left[\prod_{j=1}^{m} [(a_j - z)^{-\alpha_j} - (-1)^{-\alpha_j}(z - a_j)^{-\alpha_j}] \right]_- \times \right.$$

$$\left. \left. \times \left[\prod_{k=1}^{n} [(b_k - z)^{\beta_k} - (-1)^{\beta_k}(z - b_k)^{\beta_k}] \right]_- + \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=0}^{\alpha_j - 1} A_{jr} \delta^{(r)}(z - a_j) \right) \right\},$$

где $X_0(z)$ — каноническая функция задачи Римана с коэффициентом $G_0(x)$ (см. [2, с. 109]), $g_1(x) = \frac{g(x)}{X_0^+(x)}$, $g_1(x) = \{g_1^+(z), g_1^-(z)\}$; $[...]_-$ означает нижнюю компоненту гиперфункций $f_1(x) = \prod\limits_{j=1}^{m} (x - a_j)^{-\alpha_j}$ и $f_2(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} (x - b_k)^{\beta_k}$, соответственно (см. [13]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
3. *Парасюк О. С.* О “парных” интегральных уравнениях в классе обобщённых функций // Доклады АН СССР. 1956. Т. 110, № 6. С. 957–958.
4. *Köthe G.* Die Randverteilungen analitscher Funktionen // Math. Zeitschrift. 1952. V. 57. P. 13–33.
5. *Беркович Ф. Д.* О решении одной бесконечной системы в классе растущих последовательностей // Доклады АН СССР. 1963. Т. 149, № 3. С. 495–498.
6. *Черский Ю. И.* К решению краевой задачи Римана в классах обобщённых функций // Доклады АН СССР. 1959. Т. 125, № 3. С. 500–503.
7. *Рогожин В. С.* Краевые задачи Римана и Гильберта в классе обобщённых функций // Сибирский математический журнал. 1961. Т. 2, № 5. С. 734–745.
8. *Рогожин В. С.* Краевая задача Римана в классе обобщённых функций // Известия АН СССР. 1964. Т. 28. С. 1325–1344.
9. *Рогожин В. С.* Общая схема решения краевых задач в пространстве обобщённых функций // Доклады АН СССР. 1965. Т. 164. С. 277–280.
10. *Imai I.* Applied Hyperfunction Theory. Dordrecht: Kluwer AP, 1981.
11. *Урбанович Т. М.* К теории краевой задачи Римана в исключительных случаях // Труды 4-й международной конференции “Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений”. Т. 1. Математический анализ. Мн.: Институт математики НАН Беларуси. 2006. С. 131–138.
12. *Бремерман Г.* Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М., Мир, 1968.
13. *Урбанович Т. М.* О решении в классе гиперфункций задачи о скачке // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C. Фундаментальные науки. 2005. № 4. С. 38–44.