

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ И ПРОИЗВОДНЫХ

© Ю. С. Волков

volkov@math.nsc.ru

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск*

Пусть полный полиномиальный сплайн s степени $2n - 1$ гладкости $C^{2n-2}[a, b]$ интерполирует некоторую функцию f на сетке $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$. Изучается задача о сходимости процессов интерполяции, а именно при каких условиях $s^{(k)}$ сходится к $f^{(k)}$ для любой функции $f \in C^k[a, b]$, $0 \leq k \leq 2n - 1$. Под сходимостью понимается равномерная сходимость, т. е. $\|s^{(k)} - f^{(k)}\|_{L_\infty} \rightarrow 0$ при $\bar{h} \rightarrow 0$, где $\bar{h}$ — наибольший шаг сетки Δ .

Наибольший интерес представляет вопрос: при каких значениях k сходимость будет иметь место без ограничений на последовательность разбиений $\{\Delta\}$. К. де Бор [1] высказал предположение, что безусловная сходимость будет иметь место только для средних производных порядков $n - 1$ и n , и показал, что при $k = 0, \dots, n - 2$ сходимость без ограничений на сетки невозможна. Автором [2] были построены примеры расходимости процессов интерполяции для $k = n + 1, \dots, 2n - 1$, т. е. и для обеспечения сходимости старших производных на последовательность сеток необходимо накладывать какие-либо ограничения.

При $k = n$ указанная задача эквивалентна широко известной проблеме К. де Бора об ограниченности нормы оператора наилучшего среднеквадратичного приближения функции сплайнами степени n как операторов из $C[a, b]$ в $C[a, b]$, которая после усилий многих математиков недавно была решена А. Ю. Шадринным [3]. Тем самым для интерполяционных сплайнов s степени $2n - 1$ доказано, что $\|s^{(n)} - f^{(n)}\|_{L_\infty} \rightarrow 0$ при $\bar{h} \rightarrow 0$ для любой функции $f \in C^n[a, b]$ без каких-либо ограничений на сетки.

В докладе устанавливаются оценки величины $\|s^{(k)} - f^{(k)}\|_{L_\infty}$ через тах-норму обратной матрицы к $\mathbf{A}_k$ и модуль непрерывности $f^{(k)}$. Матрицы $\mathbf{A}_k$ были введены автором [4], [5] как матрицы систем определяющих уравнений для построения интерполяционных сплайнов произвольной степени. Определяемыми параметрами при этом являются коэффициенты разложения производной сплайна порядка k по нормализованным B -сплайнам.

Теорема 1. Для k -й производной погрешности интерполяции полным сплайном s функции $f \in C^k[a, b]$ ($0 \leq k \leq 2n - 2$) справедлива оценка

$$\|s^{(k)} - f^{(k)}\|_{L_\infty} \leq \left[K_1 + K_2 \|(\mathbf{A}_{2n-k-1}^T)^{-1}\|_\infty \right] \omega(f^{(k)}; \bar{h}),$$

где константы K_1 и K_2 зависят только от n и k , но не от Δ .

Для периодического случая данная теорема доказана в [6].

Кроме того, вопрос о сходимости процессов интерполяции эквивалентен вопросу об ограниченности норм соответствующих операторов интерполяции P_Δ , связывающих функцию $f \in C[a, b]$ и полный сплайн s , интерполирующий её на сетке Δ , т. е. $s = P_\Delta f$. Если интерполируемая функция более гладкая $f \in C^k[a, b]$, $1 \leq k \leq 2n - 1$, то можно рассмотреть оператор $P_\Delta^{(k)}$, связывающий $f^{(k)}$ с соответствующей производной сплайна $s^{(k)}$, а именно $P_\Delta^{(k)} f^{(k)} = (P_\Delta f)^{(k)}$. В этом случае изучается вопрос об ограниченности $\|P_\Delta^{(k)}\|$. При $k = 0$ считаем, что $P_\Delta^{(0)} = P_\Delta$.

Теорема 2. Для любого $k = 0, \dots, 2n - 1$ имеют место неравенства

$$D_{k,n} \|\mathbf{A}_k^{-1}\|_\infty \leq \|P_\Delta^{(k)}\| \leq \|\mathbf{A}_k^{-1}\|_\infty,$$

с константами $D_{k,n}$, зависящими только от n и k , но не от сетки Δ .

Следствие. Пусть на последовательности сеток $\{\Delta\}$ с условием $\bar{h} \rightarrow 0$ последовательность полных сплайнов $\{s\}$ интерполирует функцию $f \in C^k[a, b]$, $k = 0, \dots, 2n - 1$. Тогда $s^{(k)}(x) \rightarrow f^{(k)}(x)$ равномерно относительно x на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда существует число K такое, что для матрицы A_k соответствующей системы уравнений построения сплайна s выполнено $\|A_k^{-1}\|_\infty \leq K$.

Теорема 2 показывает, что сходимость процесса интерполяции для какой-либо производной k , $0 \leq k \leq 2n - 1$, при требованиях гладкости $f \in C^k[a, b]$ эквивалентна ограниченности тах-нормы обратной матрицы к A_k . Теорема 1 показывает, что эта же сходимость может обеспечиваться ограниченностью тах-нормы обратной матрицы к транспонированной A_{2n-k-1}^T , поскольку $\omega(g; \bar{h}) \rightarrow 0$ при $\bar{h} \rightarrow 0$ для любой функции $g \in C[a, b]$.

С другой стороны, если для некоторой последовательности сеток $\{\Delta\}$ нормы $\|A_k^{-1}\|_\infty$ могут быть ограничены константой, не зависящей от сеток, то в силу ленточности матриц нормы $\|(A_k^T)^{-1}\|_\infty$ тоже будут ограничены константой, не зависящей от сеток.

Таким образом, «хорошая» оценка последовательности норм $\|A_k^{-1}\|_\infty$, соответствующих некоторой последовательности сеток $\{\Delta\}$, гарантирует равномерную сходимость $s^{(k)}$ к $f^{(k)}$ при $\bar{h} \rightarrow 0$ для функций $f \in C^k[a, b]$ и одновременно сходимость $s^{(2n-k-1)}$ к $f^{(2n-k-1)}$ для функций $f \in C^{2n-k-1}[a, b]$ на рассматриваемой последовательности сеток $\{\Delta\}$. И наоборот, сходимость одного из указанных процессов вызывает сходимость другого, а, следовательно, и ограниченность последовательности норм матриц A_k^{-1} .

Таким образом, как следствие теорем 1 и 2 и результата А. Ю. Шадрина [3], получаем окончательное доказательство предположения К. де Бора [1], т. е. безусловную сходимость и остававшейся средней производной порядка $k = n - 1$.

Теорема 3. Для любой функции $f \in C^{n-1}[a, b]$ и любой последовательности сеток $\{\Delta\}$, удовлетворяющей условию $\bar{h} \rightarrow 0$, последовательность $s^{(n-1)}$ сходится равномерно к $f^{(n-1)}$, где полные сплайны s степени $2n - 1$ интерполируют функцию f в узлах сеток Δ и значения производных $f^{(p)}(a)$ и $f^{(p)}(b)$, $p = 1, \dots, n - 1$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ-ННИО (проект 04-01-04003), Отделения математических наук РАН (проект 2006-1.3.1), Интеграционных проектов СО РАН (проект 2006-66).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. de Boor C. On bounding spline interpolation // J. Approxim. Theory. 1975. V. 14, N 3. P. 191–203.
2. Волков Ю. С. Расходимость интерполяционных сплайнов нечетной степени // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1984. Вып. 106. С. 41–56.
3. Shadrin A. Yu. The L_∞ -norm of the L_2 -spline projector is bounded independently of the knot sequence: A proof of de Boor's conjecture // Acta Math. 2001. V. 187, N 1. P. 59–137.
4. Волков Ю. С. О построении интерполяционных полиномиальных сплайнов // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1997. Вып. 159. С. 3–18.
5. Волков Ю. С. Вполне неотрицательные матрицы в методах построения интерполяционных сплайнов нечётной степени // Матем. труды. 2004. Т. 7, № 2. С. 3–34. Перевод: Volkov Yu. S. Totally positive matrices in the methods for constructing interpolation splines of odd degree // Siberian Adv. in Math. 2005. V. 15, N 4. P. 96–125.
6. Волков Ю. С. Безусловная сходимость ещё одной средней производной для интерполяционных сплайнов нечётной степени // ДАН. 2005. Т. 401, № 5. С. 592–594.
7. Волков Ю. С. Условия ограниченности операторов сплайн-интерполяции. Новосибирск, 2006. 18 с. (Препринт № 167 / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики им. С. Л. Соболева).