

УДК 517.968 + 517.944

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ КАНОНИЧЕСКОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ

© А. Ф. Воронин

voronin@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Исследование корректности краевой задачи Римана для кусочно-голоморфного вектора, системы уравнений Винера – Хопфа и системы сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши сводится к проблеме нахождения частных индексов при факторизации соответствующих матриц-функций [1, с. 416–455; 2, 3]. В общем случае, эта проблема не решена. Более того, класс матриц-функций, для которых частные индексы можно вычислить, весьма беден.

В данной работе найдено несколько неизвестных ранее классов матриц-функций, у которых все частные индексы равны нулю. Среди них классы четных унитарных и эрмитовых матриц-функций. Получен критерий, с помощью которого выделяется класс матриц-функций со всеми равными частными индексами. Кроме того, в работе приведены результаты полного исследования корректности краевой задачи Римана с матричным коэффициентом из отмеченных выше классов матриц-функций. И как следствие, приведены результаты полного исследования корректности системы уравнений Винера – Хопфа и характеристической системы сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши.

Перейдем к постановке задачи. Пусть Γ — простая замкнутая кривая, разбивающая плоскость на две области — внутреннюю D^+ и внешнюю (бесконечную) D^- . На Γ задана непрерывная невырожденная матрица-функция $G(t)$ размера $n \times n$. Неособенная матрица-функция $G(t)$ размера $n \times n$ допускает левую стандартную факторизацию на Γ , если справедливо следующее представление для $G(t)$:

$$G(t) = G^+(t)D(t)G^-(t), \quad t \in \Gamma,$$

где $G^\pm$ — фактор-множители, непрерывные на Γ матрицы-функции, аналитически продолжимы в области $D^\pm$ и обратимы там, соответственно; $D(t) = \{t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}\}$ — диагональная матрица-функция размера $n \times n$, $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_n$ — частные индексы (целые числа),

$$\kappa := \text{Ind}_\Gamma \det G(t) \equiv \frac{1}{2\pi} [\arg \det G(t)]_\Gamma = \sum_{j=1}^n \kappa_j \quad \text{— суммарный индекс матрицы } G.$$

Аналогичным образом определяется правая стандартная факторизация [3, с. 32]. Стандартная факторизация называется канонической, если все частные индексы матрицы $G(t)$ равны нулю.

Ниже будем считать, что $\Gamma = R$. Все результаты работы, полученные для этого случая, переносятся на общий случай с помощью конформного отображения области D^+ на полуплоскость $\text{Im } p > 0$.

1. Основные результаты о частных индексах. Обозначим за I_1 матрицу $n \times n$, состоящую из нулей за исключением неглавной диагонали, которую заполняют единицы, $I_1^2 = I$ — единичная матрица.

Теорема 1 (критерий канонической факторизации). Пусть

$$G \in \mathcal{R}_{n \times n}, \quad \det G(x) \neq 0, \quad x \in R, \quad G(\infty) = I, \quad (1)$$

где $\mathcal{R}_{n \times n}$ — кольцо матриц-функций с элементами из $\mathcal{R}$ [3, с. 17]. Тогда матрица $\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\kappa/n} G(x)$, где κ — суммарный индекс $G(x)$, допускает каноническую факторизацию тогда и только

тогда, когда существуют две различные левые (правые) стандартные факторизации матрицы $G(x)$ с фактор множителями $G^\pm(x)$ и $\tilde{G}^\pm(x)$ соответственно, такие, что

$$G^+(\infty) = I, \quad \tilde{G}^+(\infty) = I_1.$$

Теорема 2. Пусть выполнено условие (1). Тогда в следующих двух случаях матрица $G(x)$ допускает левую и правую канонические факторизации:

- a) $G(x) = (G(x))^* \equiv \overline{G^T(x)}$, $x \in R$ (матрица $G(x)$ — эрмитова);
- b) $G^{-1}(x) = G^*(-x)$, $x \in R$ (матрица $G(x)$ — унитарная, если $G(x) = G(-x)$).

Рассмотрим пример. В теории интегрального уравнения в свертках на конечном интервале фундаментальную роль играет следующая матрица-функция $G(x) \in \mathcal{R}_{2 \times 2}$ [4]:

$$G(x) = \frac{1}{1 - \mathcal{F}k_-(x)} G_0(x), \quad G_0(x) = - \begin{pmatrix} 1 & -e^{ixb} \mathcal{F}k_-(x) \\ e^{-ixb} \mathcal{F}k_+(x) & 1 - \mathcal{F}k(x) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $k(t)$ — ядро интегрального уравнения в свертках, $k(t) = 0$, $t \in (-b, b)$, $k_\pm(t) = \theta(\pm t)k(t)$, $t \in R$, θ — функция Хевисайда, $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье. Из (2) и теоремы 2 а) вытекает

Предложение. Пусть $k(t)$ — четная вещественная функция и $\det G_0(x) \neq 0$, $x \in R$. Тогда матрица G в (2) допускает левую (правую) правильную факторизацию с равными частными индексами.

2. Основные результаты в области краевой задачи Римана и систем интегральных уравнений. Для кусочно-аналитического вектора Φ рассмотрим на вещественной оси краевую задачу Римана:

$$\Phi^+(p) = G(p)\Phi^-(p) + g(p), \quad p \in R, \quad (3)$$

$$\Phi_l^\pm \in \mathcal{R}_0^\pm, \quad g_l \in \mathcal{R}_0, \quad l = 1, \dots, n, \quad (4)$$

где $G \in \mathcal{R}_{n \times n}$ — матрица-функция, $\Phi^\pm(p) = (\Phi_1^\pm(p), \dots, \Phi_n^\pm(p))^T$, $g(p) = (g_1(p), \dots, g_n(p))^T$ — вектора-столбцы.

Теорема 3 (корректности). Пусть для матричного коэффициента $G(p)$ выполнены условия теоремы 2 а) или б). Тогда задача Римана (3)–(4) имеет решение, причем единственное. Кроме того, решение устойчиво по коэффициентам задачи G и g в соответствующих нормах.

Из теоремы 3 непосредственно вытекают аналогичные теоремы для системы интегральных уравнений в свертках на полуоси и характеристической системы сингулярных интегральных уравнений на вещественной оси в виду эквивалентности (в вопросах корректности) систем уравнений в свертках и сингулярных с ядром Коши задаче Римана для кусочно голоморфного вектора [1, с. 446–449; 2, 3].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке СО РАН (Междисциплинарный интеграционный проект № 48) и гранта поддержки ведущих научных школ России (НШ-7157.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968.
2. Гахов Ф. Д. Краевая задача Римана для системы n пар функций // Успехи мат. наук. 1954. Т. 7, № 4(50). С. 3–54.
3. Гохберг И. Ц, Крейн М. Г. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, № 2(80). С. 3–72.
4. Воронин А. Ф. Полное обобщение метода Винера – Хопфа для интегральных уравнений в свертках на конечном интервале с интегрируемыми ядрами // Диф. уравн. 2004. Т. 40, № 9. С. 1153–1160.