

УДК 517.55

О МЕТОДЕ СУММИРОВАНИЯ КРАТНОГО СТЕПЕННОГО РЯДА В СПИРАЛЬНОЙ ЗВЕЗДЕ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

© Е. И. Яковлев

yei@nm.ru

Сибирский государственный аэрокосмический университет
им. академика М. Ф. Решетнева, Красноярск

Метод суммирования Бореля — один из наиболее популярных методов суммирования степенного ряда (см., например, [1–4]). Впервые понятие α -спиральной звезды Миттаг-Леффлера при изучении области суммирования ввел Е. Линделеф. Н. У. Аракелян в [1] показал, что в случае одного переменного, области эффективной суммируемости могут быть только спиральными. В связи с новой волной интереса к суммированию расходящихся рядов (см., например, [5]) в настоящей работе приводится многомерный аналог метода Бореля суммирования кратного степенного ряда для многомерного обобщения звезды Миттаг-Леффлера.

Всюду в дальнейшем изложении фиксируем $x \in R_0^n := \{x \in R^n : x_j > 0, j = 1, \dots, n\}$; $\alpha \in R^n$. Пусть

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\|k\| \geq 0} a_k z^k = \sum_{\|k\| \geq 0} a_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} \quad (1)$$

— n -кратный степенной ряд, который сходится в некоторой окрестности U начала координат в C^n . В настоящей работе предлагается метод суммирования ряда (1) (строится аналитическое продолжение функции f) в так называемой (x, α) -спиральной области, являющиеся естественным обобщением спиральных областей для C^n . Перейдем к точным определениям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $x \in R_0^n, \alpha \in R^n$. Множество G в C^n назовем (x, α) -спиральным, если вместе с каждой точкой $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0)$ в области G содержится множество (x, α) -отрезок:

$$\{z \in C^n : z_j = z_j^0 t^{x_j(1+i\alpha_j)}; j = 1, \dots, n; \forall t \in [0, 1]\}$$

Множество $G \in C^n$ назовем *спиральным параболически звездным* (или просто *спиральным*), если оно (x, α) -спирально для некоторых $x \in R_0^n, \alpha \in R^n$. Аналогично дается определение $(x; \alpha)$ -звезды Миттаг-Леффлера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Максимальную $(x; \alpha)$ -спиральную область, в которую голоморфно продолжается функция f , заданная сходящимся n -кратным степенным рядом (1), назовем (x, α) -спиральной звездой Миттаг-Леффлера ряда (1) или функции f . Обозначать (x, α) -спиральную звезду Миттаг-Леффлера функции f будем $G_f^{(x, \alpha)}$.

Понятие (x, α) -спиральной звезды Миттаг-Леффлера, естественно, шире понятия x -звезды Миттаг-Леффлера. Особенно наглядно это видно при $n = 1$.

ПРИМЕР 1. Главная звезда функции $f(z) = (1 - z)^{-1}$ совпадает с комплексной плоскостью без луча $[1, \infty)$, а ее α -спиральная звезда Миттаг-Леффлера совпадает с множеством

$$M_\alpha := C \setminus \{z \in C : z = t^{1+i\alpha}, t \in [1, +\infty)\}$$

В случае $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$ (x, α) -спиральные множества переходят в x -звездные. В случае одного переменного всякая x -звезда Миттаг-Леффлера совпадает с обычной звездой Миттаг-Леффлера или главной звездой данного степенного ряда. В случае многих переменных это не так.

ПРИМЕР 2. Функция $f(z_1, z_2) = (1 - z_2 + z_1^2)^{-1}$ имеет главную звезду, отличную от $(1, 2)$ -звезды Миттаг-Леффлера.

Таким образом, можно указать функцию f , у которой, например, (1,2)-звезда несет больше информации о функции, чем ее главная или (1,1)-звезда.

Рассмотрение спиральных множеств накладывает свой отпечаток на введение преобразование Бореля. Ассоциируем с функцией f , заданной рядом (1), целую функцию $F_{(x;\alpha,\rho)}(z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $x \in R_0^n$, $\alpha \in R^n$, $\rho > 0$. Назовем $(x;\alpha,\rho)$ -преобразованием Бореля функции $f(z)$, заданной рядом (1) функцию $F_{(x;\alpha,\rho)}(z)$, определяемую степенным рядом:

$$F_{(x;\alpha,\rho)}(z) = \sum_{\|k\| \geq 0} \frac{a_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}}{\Gamma((x_1(1+i\alpha_1)k_1 + \dots + x_n(1+i\alpha_n)k_n)\rho^{-1} + 1)}$$

Функция f , заданная рядом (1), сходящимся в некоторой окрестности U начала координат, и ее $(x;\alpha,\rho)$ -преобразование Бореля связаны интегральной формулой

$$f(z_1, \dots, z_n) = \int_0^\infty e^{-t} F_{(x;\alpha,\rho)}(z_1 t^{\frac{x_1(1+i\alpha_1)}{\rho}}, \dots, z_n t^{\frac{x_n(1+i\alpha_n)}{\rho}}) dt. \quad (2)$$

Формула (2) справедлива всюду в области сходимости ряда (1), но интеграл в формуле (2) может абсолютно и равномерно сходиться и в большей области, давая тем самым аналитическое продолжение функции f .

Теорема. Пусть f голоморфна в некоторой окрестности начала координат в C^n , задана там кратным степенным рядом (1) и $F_{(x;\alpha,\rho)}$ — ее спиральное преобразование Бореля. Тогда формула

$$f(z) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-t} F_{(x;\alpha,\rho)}(z_1 t^{\frac{x_1(1+i\alpha_1)}{\rho}}, \dots, z_n t^{\frac{x_n(1+i\alpha_n)}{\rho}}) dt.$$

дает голоморфное продолжение функции f в любую область D , компактно принадлежащую $G_f^{x;\alpha}$ — $(x;\alpha)$ -звезде Миттаг-Леффлера функции f .

В случае $n = 1$ настоящий результат в усиленном варианте принадлежит С. К. Балашову и имеется в [5].

В [2, 3] даны продолжения ряда вида (1) соответственно в его (x) -звезду и главную звезду Миттаг-Леффлера с помощью иных формул.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аракелян Н. У. Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов // Матем. сб. 1984. Т. 124, № 5. С. 24–44.
2. Маергойз Л. С. Асимптотические характеристики целых функций и их приложения в математике и биофизике. Н.: Наука, 1991.
3. Айзенберг Л. А., Трутнев В. М. Об одном методе суммирования Бореля кратных степенных рядов // Сиб. матем. журнал. 1971. Т. 12, № 6. С. 1398–1404.
4. Балашов С. К. О целых функциях вполне регулярного роста ао кривым правильного вращения. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 1972. 107 с.
5. Рамис Ж.-П. Расходящиеся ряды и асимптотические теории. М. – Ижевск: Инст. комп. иссл., 2002. 80 с.