Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 432–433

УДК 517.51

К ТЕОРЕМАМ ОБ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ И О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ЛИПШИЦЕВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© И. В. Журавлев

igor.zhuravlev@volsu.ru

Волгоградский государственный университет, Волгоград

Работа посвящена теоремам об обратной функции и о неявной функции [1–6] для липшицевых отображений областей банаховых пространств.

Пусть Y, Z — нормированные пространства. Если $a \in Y,$ то символом $B(a, r)$ обозначим открытый шар в Y с центром a радиуса $r > 0$. Обозначим через $\mathcal{L}(Z, Y)$ пространство линейных непрерывных операторов, действующих из Z в Y.

Если $a \in Z$ и $M \subset Z,$ то $\pi(a,\ M) = \{z \in Z : z = a + (m - a)t,\ m \in M,\ t \in \mathbf{R}\}$ — множество точек, каждая из которых лежит на прямой, проходящей через a и некоторую точку $m \in M,\ m \neq a$.

Пусть $U \subset Y$. Будем говорить, что функция $\Phi : U \to Z$ удовлетворяет на множестве U *условию Липшица с постоянной* $L,$ если для любых $y_1, y_2 \in U$ выполняется неравенство

$$\|\Phi(y_2) - \Phi(y_1))\|_Z \leq L \|y_2 - y_1\|_Y .$$

Точную нижнюю границу постоянных L в этом неравенстве будем обозначать $\mathrm{Lip}(\Phi, U)$.

Теорема 1. *Пусть Y, Z — банаховы пространства, $B = B(y_0, r) \subset Y$ и $\Phi : B \to Z$ — ограниченное отображение, удовлетворяющее на B следующему условию: существует такое линейное непрерывное отображение $C \in \mathcal{L}(Z, Y)$ и постоянная $q,$ $0 \leq q < 1,$ что*

$$\mathrm{Lip}(C\Phi(y) - y, B) \leq q < 1.$$

Тогда, если для некоторого $y \in B$ множество $\pi(\Phi(y),\ \Phi(B))$ совпадает с пространством $Z,$ то множество $\Phi(B)$ открыто и отображение Φ гомеоморфно отображает B на $\Phi(B)$. При этом отображения Φ и $\Phi^{-1} : \Phi(B) \to B$ удовлетворяют условию Липшица.

Пусть $U \subset Y$. Для ограниченной функции $\Phi : U \to Z$ полагаем

$$\omega\,(\Phi, U) = \inf_{C \in \mathcal{L}(Z,Y)} \mathrm{Lip}(C\Phi(y) - y, U).$$

Отметим, что для любой ограниченной на U функции $\Phi : U \to Z$ выполняется нравенство $\omega\,(\Phi, U) \leq 1$. Если точка $a \in U,$ то $\omega\,(\Phi, a) = \lim\limits_{r \to 0+} \omega\,(\Phi, U \cap B(a, r))$. Пусть $\pi(\Phi, a) = \bigcap\limits_{0<r} \pi(\Phi(a),\ \Phi(U \cap B(a, r)))$.

Теорема 2. *Пусть Y, Z — банаховы пространства, $B = B(y_0, r) \subset Y$ и $\Phi : B \to Z$ — ограниченное отображение, которое в некоторой точке $a \in B,$ удовлетворяет условиям $\omega\,(\Phi, a) < 1$ и $\pi(\Phi, a) = Z$. Тогда существует такой шар $U = B(a, r_1) \subset B,$ что множество $\Phi(U)$ открыто и отображение Φ гомеоморфно отображает U на $\Phi(U)$. При этом отображения Φ и $\Phi^{-1} : \Phi(U) \to B$ удовлетворяют условию Липшица.*

Пусть $U \subset X,$ $V \subset Y$ и $D = U \times V$. Будем говорить, что функция $\Phi : D \to Z$ удовлетворяет на множестве D *условию Липшица с постоянной* $L,$ если для любых $(x_1, y_1),$ $(x_2, y_2) \in D$ выполняется неравенство

$$\|\Phi(x_2, y_2) - \Phi(x_1, y_1))\|_Z \leq L\,(\|x_2 - x_1\|_X + \|y_2 - y_1\|_Y)\,.$$

Точную нижнюю границу постоянных L в этом неравенстве будем обозначать $\mathrm{Lip}(\Phi, D)$.

Теорема 3. *Пусть U — непустое подмножество пространства X, $B = B(y_0, r) \subset Y$. Полагаем $D = U \times B$ и пусть $\Phi : D \to Z$ — отображение, удовлетворяющее на D условию Липшица. Предположим, что существует такое линейное отображение $A \in \mathcal{L}(Z, Y)$ и постоянная q, $0 \le q < 1$, что*

$$\|A(\Phi(x, y_2) - \Phi(x, y_1)) - (y_2 - y_1)\|_Y \le \|y_2 - y_1\|_Y ,$$

для всех $(x, y_2), (x, y_1) \in D$. Если $\pi(\Phi(x, y),\ \Phi(x, B)) = Z$ хотя бы для одного $(x, y) \in D$, то для каждой точки $(a, b) \in D$ на множестве $U_\rho = B(a, \rho) \cap U$, $\rho = \dfrac{(1-q)(r - \|b\|_Y)}{\|A\| \, \mathcal{L}ip(\Phi, D)}$, существует и единственно отображение $G : U_\rho \to B(b,\ r - \|b\|_Y)$, $G(a) = b$, которое для всех $x \in U_\rho$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi(x, G(x)) = \Phi(a, b).$$

Отображение G липшицево на U_ρ и $\mathrm{Lip}(G,\ U_\rho) \le \dfrac{(r - \|b\|_Y)}{\rho}$.

В следующай теореме удается отказаться от условия $\pi(\Phi(y),\ \Phi(B)) = Z$. Обозначим через $\overline{\mathcal{L}_0\,(Z, Y)}$ замыкание множества тех $A \in \mathcal{L}\,(Z, Y)$, для которых $\ker A = \{\,0\} \subset Z$ и пусть $\mathcal{L}_0 = \overline{\mathcal{L}_0\,(Z, Y)} \cup \{0\}$, где $0 \in \mathcal{L}\,(Z, Y)$. Для липшицевой функции $\Phi : U \to Z$, $U \subset Y$, полагаем

$$\omega_0\,(\Phi, U) = \inf_{C \in \mathcal{L}_0} \mathrm{Lip}(C\Phi(y) - y, U).$$

Теорема 4. *Пусть Y, Z — банаховы пространства, $B = B(y_0, r) \subset Y$ и $\Phi : B \to Z$ — отображение, удовлетворяющее на B условию Липшица. Предположим, что $\omega_0\,(\Phi, B) < 1$. Тогда множество $\Phi(B)$ открыто и отображение Φ гомеоморфно отображает B на $\Phi(B)$. При этом отображение $\Phi^{-1} : \Phi(B) \to B$ удовлетворяет условию Липшица.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Люстерник Л. А., Соболев В. Н.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
3. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.
4. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971. 392 с.
5. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
6. *Krantz S. G., Parks H. R.* The Implicit Funtion Theorem: History, Theory and Applications. Boston, Bukhäuser, 2002. 164 p.