Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Задача определения правой части в операторно-дифференциальном уравнении с параметром

Н.Л. Абашеева*

* ИМ СО РАН,
пр. Ак. Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: anl@math.nsc.ru

Работа была поддержана грантом РФФИ 06-01-00439, грантом НШ-7157.2006.1 и интеграционными проектами СО РАН №48 и №2.2

Пусть $0 < T < \infty$, H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$, $L : H \to H$ — самосопряженный оператор с областью определения $D(L)$, $\exists\delta > 0$ такое, что $-(Lu,u) \geq \delta\|u\|^2$ для $\forall u \in D(L)$.

В работе исследуется следующая обратная задача с параметром $p \in (p_1,p_2)$ $(p_1 < p_2)$.

Задача 1_p. Найти пару функций $u(t,p)$ и $f(t)$, удовлетворяющих уравнению

$$u_t - pLu = f(t), \quad t \in (0,T),\ p \in (p_1,p_2), \tag{1}$$

и краевым условиям

$$u(0,p) = u_0(p), \quad u(T,p) = u_1(p).$$

Такие обратные задачи исследовались в работах Ю. Е. Аниконова [1, 2]. Заметим, что уравнения с параметром возникают после применения преобразования Фурье по переменной y к уравнениям вида

$$\frac{\partial^k w}{\partial t^k} - \frac{\partial}{\partial y}Aw = f(x,t)\lambda(y),$$

где $w = w(x,t,y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t, y \in \mathbb{R}$, L — линейный оператор, действующий по переменной x. Кроме того, представляется возможным в уравнениях вида (1) считать коэффициент p переменной величиной, т. е., например, считать переменным коэффициент теплопроводности в уравнении (1). Физически это может означать, что рассматриваются одновременно среды с различными коэффициентами теплопроводности, коэффициентами диффузии, волны с разными скоростями, частицы с разными массами. Отметим, что задача 1_p с фиксированным параметром p и без дополнительных условий на f некорректна. В данной работе предлагается искать функцию f с помощью варьирования параметра p.

Введем пространство H_1 как пополнение $D(L)$ по норме

$$\|u\|_{H_1} = \sqrt{|(Lu,u)|}$$

и негативное пространство H_{-1}, построенное по пространствам H_1 и H, т. е. пополнение H по норме

$$\|u\|_{H_{-1}} = \sup_{\varphi\in H_1, \varphi\neq 0} \frac{|(u,\varphi)|}{\|\varphi\|_{H_1}}.$$

Предположим дополнительно, что $L^{-1} : H_1 \to H_1$ вполне непрерывен.

Возьмем любую функцию $\Phi(t,p) \in L_2((0,T)\times(p_1,p_2);H_1))$ такую, что $\Phi_t \in \cap L_2((0,T)\times(p_1,p_2);H_{-1}))$ и $\Phi(0,p) = u_0(p)$, $\Phi(T,p) = u_1(p)$. Тогда заменой $v = u - \Phi$ наша задача сводится к следующей задаче с однородными краевыми условиями.

Задача $1'_p$. Найти пару функций $v(t,p)$ и $f(t)$, удовлетворяющих уравнению

$$v_t - pLv = f(t) - g(t,p), \quad t \in (0,T),\ p \in (p_1,p_2), \tag{2}$$
$$v(0,p) = 0, \quad v(T,p) = 0. \tag{3}$$

Обозначим через $v_n \in H_1$ собственные векторы оператора L, соответствующие собственным значениям λ_n $(\ldots \leq \lambda_{n+1} \leq \lambda_n \leq \ldots \leq \lambda_1 < 0)$, т. е. $Lv_n = \lambda_n v_n$. В силу самосопряженности и вполне непрерывности оператора L векторы v_n(после соответствующей нормировки) образуют ортонормированный базис пространства H, базис Рисса пространств H_1 и H_{-1}. Значит, любой элемент $v \in H_1$ представим в виде

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n, \quad \text{где} \quad c_n = (v, v_n).$$

Причем нормы в этих пространствах эквивалентны следующим

$$\|v\|^2_{H_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n||c_n|^2, \quad \|v\|^2_H = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2, \quad \|v\|^2_{H_{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-1}|c_n|^2.$$

Обозначим через H_2, H_{-2} пространства с нормами $\|v\|^2_{H_2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2|c_n|^2$, $\|v\|^2_{H_{-2}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-2}|c_n|^2$ соответственно.

Далее, положим $E = L_2((p_1,p_2) \times (0,T); H)$, $V_1 = \{v \in L_2((p_1,p_2) \times (0,T); H_2) : \exists v_t \in E,\ v(0,p) = v(T,p) = 0\}$. Также введем подпространства пространства E

$$S_0 = L_2(0,T;H), \quad S_1 = \{\varphi(t,p) \in E :\ \exists v \in V_1 \text{ такая, что } \varphi = v_t - pLv\}.$$

Лемма. *Множество $S = S_0 + S_1$ плотно в E и $S_1 \cap S_0 = \{0\}$.*

Замечание. Множество S плотно, но не совпадает с E. Также заметим, что из $S_1 \cap S_0 = \{0\}$ следует единственность решения задачи $1'_p$ (и 1_p) в классе $f \in L_2(0,T;H)$, $v \in V_1$.

Положим

$$G_n(p) = -\int_0^T e^{-\lambda_n p t} g_n(t,p)\, dt, \tag{4}$$

где $g_n = (g, v_n)$.

Справедлива

Теорема. *Пусть $g(x,t,p) \in C([p_1,p_2]; L_2(0,T;H_{-1}))$ и $g(t,p)$ — аналитическая функция по переменной p на множестве (p_1,p_2), допускающая аналитическое продолжение до целой функции по переменной p, такой, что $g(t,ip) \in W^1_2(\mathbb{R}; L_2(0,T;H_{-2}))$ и для каждой из функций $G_n(p)$, $n \in \mathbb{N}$, которые определяются формулами (4), выполнены условия*

$$\lim_{\xi\to\infty}\left[\min\{1, e^{\lambda_n T\xi}\} \sup_{\eta\in\mathbb{R}} |G_n(\xi + i\eta)|\right] = 0, \quad \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left[\min\{1, e^{2\lambda_n \xi T}\} \int_{-\infty}^{\infty} |G_n(\xi + i\eta)|^2\, d\eta\right] < \infty;$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|G_n\Big(i\frac{2\pi k}{\lambda_n T}\Big)\right|^2 < \infty.$$

Тогда существует единственное решение $\{v, f\}$ обратной задачи $1'_p$ такое, что $v \in C([p_1,p_2]; L_2(0,T;H_1))$, $v_t \in C([p_1,p_2]; L_2(0,T;H_{-1}))$, $f \in L_2(0,T;H_{-1})$.

Замечание. Аналогично можно исследовать задачу определения функций $u(t,p)$ и $f(t)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} - pLu = f(t), \quad t \in (0,T),\ p \in (p_1, p_2),$$

и краевым условиям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(0,p) = u_j(p), \quad j = 0,1,\ldots,k-1, \\ &u(T,p) = u_k(p). \end{aligned}$$

Список литературы

[1] *Аниконов Ю. Е.* Представления решений и обратные задачи для эволюционных и дифференциально-разностных уравнений. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2003. (Препринт № 108 / ИМ СО РАН).

[2] *Anikonov Yu. E.* Inverse problems for evolution and differential-difference equations with a parameter // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2003. V. 11, N 5. P. 439–473.