Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”, посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

О существовании и единственности решения одной обратной задачи

А. Асанов[*], К.Б. Матанова[**]

[*] КТУ “Манас“,
пр. Мира, 56,
630090 Бишкек, Кыргызстан
E-mail: avit.asanov@manas.kg

[**] КТУ “Манас“,
пр. Мира, 56,
630090 Бишкек, Кыргызстан
E-mail: kalys_26@mail.ru

В последнее время обратные задачи находят очень широкое применение в различных областях науки: геофизике, сейсмологии, компьютерной томографии, оптике и др. Фундаментальные результаты в исследованиях обратных задач были изложены в работах [1]-[7]. В данной статье исследована коффициентная обратная задача. С помощью метода интегральных уравнений и метода функции Грина обратная задача сводится к операторным уравнениям Вольтерра второго рода.

Рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка с частными производными

$$u'_t = a_0(Au)_t + a_1(Au) + \sum_{i=0}^{3} b_i(t,x)\frac{\partial^{3-i}u}{\partial x^{3-i}} + a(t,x)\lambda(t)u(t,x) + f(t,x), \tag{1}$$

с начальным и краевыми условиями

$$u(0,x) = u_0(x), \tag{2}$$

$$u(t,0) = u(t,1) = u'_x(t,0) = 0, \tag{3}$$

$$u(t,x_0) = g(t), t \in [0,T], x \in [0,1], \tag{4}$$

где $a_0 \neq 0$, a_1 - заданные числа, $b_i(t,x)$, $i = \overline{0,3}$, $a(t,x)$, $f(t,x)$ - известные функции. Требуется найти функции $u(t,x)$, $\lambda(t)$ по следу решения (4). Здесь A - дифференциальный оператор, который имеет вид $Au = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \alpha_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha_2\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_3 u$, α_1, α_2, α_3 - заданные постоянные.

Введем обозначение

$$u'_t(t,x) = v(t,x). \tag{5}$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$Av(t,x) = -\frac{a_1}{a_0}\int_0^t Av(s,x)ds + \frac{1}{a_0}v(t,x) - \frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{3} b_i(t,x)\int_0^t \frac{\partial^{3-i}v(s,x)}{\partial x^{3-i}}ds - \frac{1}{a_0}a(t,x)\lambda(t)\int_0^t v(s,x)ds -$$
$$-\frac{1}{a_0}a(t,x)u_0(x)\lambda(t) - \frac{1}{a_0}\left(Au_0(x) + \sum_{i=0}^{3} b_i(t,x)\frac{d^{3-i}u_0(x)}{dx^{3-i}} + f(t,x)\right). \tag{6}$$

Используя резольвенту $R(t,s) = -\frac{a_1}{a_0}exp\left(-\frac{a_1}{a_0}(t-s)\right)$ для ядра $-\frac{a_1}{a_0}$, из (6) определим Av:

$$Av(t,x)-\frac{1}{a_0}v(t,x)=\frac{1}{a_0}\int\limits_0^t R(t,s)v(s,x)ds-\frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{3}b_i(t,x)\int\limits_0^t \frac{\partial^{3-i}v(s,x)}{\partial x^{3-i}}ds-\frac{1}{a_0}a(t,x)\lambda(t)\int\limits_0^t v(s,x)ds-$$
$$-\frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{3}\int\limits_0^t\int\limits_0^s b_i(s,x)R(t,s)\frac{\partial^{3-i}v(\tau,x)}{\partial x^{3-i}}d\tau ds-\frac{1}{a_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^s R(t,s)a(s,x)\lambda(s)v(\tau,x)d\tau ds-$$
$$-\frac{u_0(x)}{a_0}\int\limits_0^t R(t,s)a(s,x)\lambda(s)ds-\frac{1}{a_0}a(t,x)u_0(x)\lambda(t)-\frac{1}{a_0}\Bigg(a_1Au_0(x)+\sum_{i=0}^{3}b_i(t,x)\frac{d^{3-i}u_0(x)}{dx^{3-i}}+$$
$$+f(t,x)+\int\limits_0^t\left[a_1Au_0(x)+\sum_{i=0}^{3}b_i(s,x)\frac{d^{3-i}u_0(x)}{dx^{3-i}}+f(s,x)\right]R(t,s)ds\Bigg). \qquad (7)$$

Пусть $G(x,\xi)$ - функция Грина [8] для дифференциального уравнения $Au-\frac{1}{a_0}u=f(x)$ с краевыми условиями (3). Используя функцию Грина, (7) запишем следующим образом:

$$v(t,x)+\frac{\lambda(t)}{a_0}\int\limits_0^1 G(x,\xi)a(t,\xi)u_0(\xi)d\xi=\frac{1}{a_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G(x,\xi)R(t,s)v(s,\xi)d\xi ds-$$
$$-\frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{3}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G(x,\xi)b_i(t,\xi)v_{3-i}(s,\xi)d\xi ds-\frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{3}\int\limits_0^t\int\limits_0^s\int\limits_0^1 G(x,\xi)b_i(s,\xi)R(t,s)v_{3-i}(\tau,\xi)d\xi d\tau ds-$$
$$-\frac{1}{a_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^s\int\limits_0^1 G(x,\xi)R(t,s)a(s,\xi)\lambda(s)v(\tau,\xi)d\xi d\tau ds-\frac{\lambda(t)}{a_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G(x,\xi)a(t,\xi)v(s,\xi)d\xi ds-$$
$$-\frac{1}{a_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G(x,\xi)u_0(\xi)R(t,s)a(s,\xi)\lambda(s)d\xi ds+F(t,x)=V[y], \qquad (8)$$

где

$$v_0(t,x)=v(t,x),\quad v_1(t,x)=\frac{\partial v(t,x)}{\partial x},\quad v_2(t,x)=\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2},\quad v_3(t,x)=\frac{\partial^3 v(t,x)}{\partial x^3},\quad y=(v,v_1,v_2,v_3,\lambda),$$

$$F(t,x)=-\frac{1}{a_0}\int\limits_0^1 G(x,\xi)\Bigg(a_1Au_0(\xi)+\sum_{i=0}^{3}b_i(t,\xi)\frac{d^{3-i}u_0(\xi)}{d\xi^{3-i}}+f(t,\xi)+$$
$$+\int\limits_0^t R(t,s)\left[a_1Au_0(\xi)+\sum_{i=0}^{3}b_i(s,\xi)\frac{d^{3-i}u_0(\xi)}{d\xi^{3-i}}+f(s,\xi)\right]ds\Bigg)d\xi. \qquad (9)$$

Продифференцируем (8) по x три раза. При этом учтем, что вторая производная $\frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2}$ функции

Грина испытывает в точке $x=\xi$ скачок, равный единице [9]:

$$v_j(t,x)+\frac{\lambda(t)}{a_0}\int\limits_0^1\frac{\partial^j G(x,\xi)}{\partial x^j}a(t,\xi)u_0(\xi)d\xi=\frac{1}{a_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^1\frac{\partial^j G(x,\xi)}{\partial x^j}R(t,s)v(s,\xi)d\xi ds-$$

$$-\frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{3}\int\limits_0^t\int\limits_0^1\frac{\partial^j G(x,\xi)}{\partial x^j}b_i(t,\xi)v_{3-i}(s,\xi)d\xi ds-\frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{3}\int\limits_0^t\int\limits_0^s\int\limits_0^1\frac{\partial^j G(x,\xi)}{\partial x^j}b_i(s,\xi)R(t,s)v_{3-i}(\tau,\xi)d\xi d\tau ds-$$

$$-\frac{1}{a_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^s\int\limits_0^1\frac{\partial^j G(x,\xi)}{\partial x^j}R(t,s)a(s,\xi)\lambda(s)v(\tau,\xi)d\xi d\tau ds-\frac{\lambda(t)}{a_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^1\frac{\partial^j G(x,\xi)}{\partial x^j}a(t,\xi)v(s,\xi)d\xi ds-$$

$$-\frac{1}{a_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^1\frac{\partial^j G(x,\xi)}{\partial x^j}u_0(\xi)R(t,s)a(s,\xi)\lambda(s)d\xi ds+\frac{\partial^j F(t,x)}{\partial x^j}=V_j[y],\qquad j=1,2, \tag{10}$$

$$v_3(t,x)+\frac{\lambda(t)}{a_0}\left(a(t,x)u_0(x)+\int\limits_0^1\frac{\partial^3 G(x,\xi)}{\partial x^3}a(t,\xi)u_0(\xi)d\xi\right)=\frac{1}{a_0}\int\limits_0^t\left(R(t,s)v(s,x)+\int\limits_0^1\frac{\partial^3 G(x,\xi)}{\partial x^3}\times\right.$$

$$\left.\times R(t,s)v(s,\xi)d\xi\right)ds-\frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{3}\int\limits_0^t\left(b_i(t,x)v_{3-i}(s,x)+\int\limits_0^1\frac{\partial^3 G(x,\xi)}{\partial x^3}b_i(t,\xi)v_{3-i}(s,\xi)d\xi\right)ds-$$

$$-\frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{3}\int\limits_0^t\int\limits_0^s\left(b_i(s,x)R(t,s)v_{3-i}(\tau,x)+\int\limits_0^1\frac{\partial^3 G(x,\xi)}{\partial x^3}b_i(s,\xi)R(t,s)v_{3-i}(\tau,\xi)d\xi\right)d\tau ds-$$

$$-\frac{1}{a_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^s\lambda(s)R(t,s)\left(a(s,x)v(\tau,x)+\int\limits_0^1\frac{\partial^3 G(x,\xi)}{\partial x^3}a(s,\xi)v(\tau,\xi)d\xi\right)d\tau ds-\frac{\lambda(t)}{a_0}\int\limits_0^t\left(a(t,x)v(s,x)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^1\frac{\partial^3 G(x,\xi)}{\partial x^3}a(t,\xi)v(s,\xi)d\xi\right)ds-\frac{1}{a_0}\int\limits_0^t\lambda(s)R(t,s)\left(a(s,x)u_0(x)+\int\limits_0^1\frac{\partial^3 G(x,\xi)}{\partial x^3}u_0(\xi)a(s,\xi)d\xi\right)ds+$$

$$+\frac{\partial^3 F(t,x)}{\partial x^3}=V_3[y]. \tag{11}$$

При $x=x_0$ из (8) получим следующее уравнение относительно неизвестной $\lambda(t)$:

$$\frac{\lambda(t)}{a_0}\int\limits_0^1 G(x_0,\xi)a(t,\xi)u_0(\xi)d\xi=\frac{1}{a_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G(x_0,\xi)R(t,s)v(s,\xi)d\xi ds-$$

$$-\frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{3}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G(x_0,\xi)b_i(t,\xi)v_{3-i}(s,\xi)d\xi ds-\frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{3}\int\limits_0^t\int\limits_0^s\int\limits_0^1 G(x_0,\xi)b_i(s,\xi)R(t,s)v_{3-i}(\tau,\xi)d\xi d\tau ds-$$

$$-\frac{1}{a_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^s\int\limits_0^1 G(x_0,\xi)R(t,s)a(s,\xi)\lambda(s)v(\tau,\xi)d\xi d\tau ds-\frac{\lambda(t)}{a_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G(x_0,\xi)a(t,\xi)v(s,\xi)d\xi ds-$$

$$-\frac{1}{a_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G(x_0,\xi)u_0(\xi)R(t,s)a(s,\xi)\lambda(s)d\xi ds+F(t,x_0)-g_t'(t)=V_4[y]. \tag{12}$$

Итак, получили систему из пяти уравнений с пятью неизвестными:

$$\left\{\begin{array}{rcl} v(t,x)+a_1(t,x)\lambda(t) & = & V[y], \\ v_1(t,x)+\frac{\partial a_1(t,x)}{\partial x}\lambda(t) & = & V_1[y], \\ v_2(t,x)+\frac{\partial^2 a_1(t,x)}{\partial^2 x}\lambda(t) & = & V_2[y], \\ v_3(t,x)+\frac{\partial^3 a_1(t,x)}{\partial^3 x}\lambda(t) & = & V_3[y], \\ a_1(t,x_0)\lambda(t) & = & V_4[y], \end{array}\right. \tag{13}$$

где

$$a_1(t,x)=\frac{1}{a_0}\int\limits_0^1 G(x,\xi)a(t,\xi)u_0(\xi)d\xi.$$

Пусть определитель

$$A=\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & a_1(t,x) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\partial a_1(t,x)}{\partial x} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\partial^2 a_1(t,x)}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\partial^3 a_1(t,x)}{\partial x^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1(t,x_0) \end{array}\right| = a_1(t,x_0)\neq 0. \tag{14}$$

Тогда, умножая обе части системы (13) на обратную матрицу A^{-1}, получим

$$y=A^{-1}B[y],$$

где $B[y]=(V[y],V_1[y],V_2[y],V_3[y],V_4[y])$, или

$$y(t,x)=Sy=\begin{pmatrix} S_1y \\ S_2y \\ S_3y \\ S_4y \\ S_5y \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$S_jy=\mu V_{j-1}[y]-\frac{\nu+\mu\frac{\partial^{j-1}a_1(t,x)}{\partial x^{j-1}}}{a_1(t,x_0)}V_4[y], \quad j=\overline{1,5}. \tag{16}$$

Здесь

$$V_0[y]=V[y], \qquad \mu=\left\{\begin{array}{ll} 1, & \text{при } j<5, \\ 0, & \text{при } j=5, \end{array}\right. \qquad \nu=\left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{при } j<5, \\ -1, & \text{при } j=5. \end{array}\right.$$

Таким образом, обратная задача (1)-(4) эквивалентна системе операторных уравнений Вольтерра второго рода (15). Применим к ней принцип сжатых отображений.

Введем банахово пространство $X=C_4(G)\times C[0,T], \quad G=\{(t,x), \quad 0\le t\le T, \quad 0\le x\le 1\}$, $C_4(G)=C(G)\times C(G)\times C(G)\times C(G)$. Норма в этом пространстве $\forall y\in X$

$$\|y(t,x)\|_X=\|v\|_{C(G)}+\|v_1\|_{C(G)}+\|v_2\|_{C(G)}+\|v_3\|_{C(G)}+\|\lambda\|_{C[0,1]},$$

где $\|v_i\|_{C(G)}=\sup\limits_{(t,x)\in G}|v_i(t,x)|, \quad i=\overline{0,3}, \quad \|\lambda(t)\|_{C[0,T]}=\sup\limits_{t\in[0,T]}|\lambda(t)|.$

Покажем существование единственной фиксированной точки отображения

$$S: \quad y\longrightarrow Sy.$$

Так как заданные функции предполагаются непрерывно-дифференцируемыми необходимое число раз, то из соотношения (9) видно, что можно выбрать положительное число R такое, что

$$\left\|y^0\right\|_X\le R, \tag{17}$$

где

$$y^0 = (v^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0, \lambda^0),$$

$$v_j^0 = \frac{\partial^j F(t,x)}{\partial x^j} - \frac{\frac{\partial^j a_1(t,x)}{\partial x^j}}{a_1(t,x_0)} \left(F(t,x_0) - g_t'(t) \right), \quad j = \overline{0,3}, \quad \lambda^0 = \frac{F(t,x_0) - g_t'(t)}{a_1(t,x_0)}.$$

Рассмотрим шар $B_{2R} = \left\{ y \in X \middle| \, \|y\|_X \le 2R \right\}$ и покажем, что для достаточно малых T отображение S переводит шар B_{2R} в себя и является сжимающим.

Действительно, для достаточно малых T, удовлетворяющих условию $(k_1 T + k_2 T^2)R + k_3 T + k_4 T^2 \le 1$, в силу нормы пространства X и с учетом (17) из (15), (16) имеем

$$\|Sy\|_X \le \left\{ \left(k_1 T + k_2 T^2 \right) R + k_3 T + k_4 T^2 \right\} R + R \le 2R, \tag{18}$$

где $k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad k_4$ - известные положительные постоянные, не зависящие от T и R.

Пусть теперь $y^1 = (v^1, v_1^1, v_2^1, v_3^1, \lambda^1), \quad y^2 = (v^2, v_1^2, v_2^2, v_3^2, \lambda^2) \in B_{2R}$. Тогда для достаточно малых $T > 0$ из (15), (16) имеем

$$\left\| Sy^1 - Sy^2 \right\|_X \le \frac{1}{2} \left\{ \left(k_1 T' + k_2 T'^2 \right) R + k_3 T' + k_4 T'^2 \right\} R \left\| y^1 - y^2 \right\|_X. \tag{19}$$

Из оценок (18), (19) следует, что для достаточно малых $T > 0$ оператор S отображает шар B_{2R} в себя и является сжимающим. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются условия:
1) $b_i(t,x), i = \overline{0,3}, a(t,x), f(t,x)$ - непрерывные функции, $u_0(x)$ трижды непрерывно-дифференцируемая функция, $g(t)$ - непрерывно-дифференцируемая функция;
2) выполняется условие (14), то есть $\int\limits_0^1 G(x_0,\xi) a(t,\xi) u_0(\xi) d\xi \ne 0$;
3) для достаточно малых T выполняется неравенство $(k_1 T + k_2 T^2)R + k_3 T + k_4 T^2 \le 1$, где k_1, k_2, k_3, k_4 - известные положительные постоянные, не зависящие от T и R.
Тогда решение обратной задачи (1)-(4) существует и единственно в пространстве $C^{3,1}(G) \times C[0,T]$.

Список литературы

[1] Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. - М.: Наука, 1980. - 286 с.

[2] Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. - М.: Наука, 1984. - 264 с.

[3] Кабанихин С. И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. - Новосибирск: Наука, 1988. - 166 с.

[4] Самарский А. А., Вабишевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. - М.: УРСС, 2004. - 478 с.

[5] Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач: Учебное пособие. - М.: Изд-во МГУ, 1994. - 207 с.

[6] Яхно В. Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. - Новосибирск: Наука, 1990. - 303 с.

[7] Anikonov Yu. E. Inverse problems for kinetic and other evolution equations. VSP, Utrecht. - Netherland, 2001. - 270 p.

[8] Матанова К. Б. Об одной обратной задаче для псевдопараболического уравнения // Научные труды ОшГУ, Ош, 1999. - Вып.2. - С.137-145.

[9] Коллатц Л. Задачи на собственные значения. - М.: Наука, 1968. - 504 с.