

Обратная задача для операторно-дифференциального уравнения

Н.Б. Аюпова*

* ИМ СО РАН,
пр. Ак. Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: ayupova@math.nsc.ru

*Работа автора была поддержана РФФИ (грант 06-01-00439),
Интеграционным грантом СО РАН (проект 48)*

Рассматривается следующая обратная задача: найти комплекснозначные функции

$$w(x, t), \quad \lambda(x), \quad x \in D \in \mathbb{R}^n, \quad a \leq t \leq b,$$

удовлетворяющие операторно-дифференциальному уравнению

$$Bw_t = Aw + f(t, x) * \lambda(x), \quad (1)$$

$$w|_{t=a} = w_a(x), \quad w|_{t=b} = w_b(x). \quad (2)$$

Здесь A, B — линейные операторы, действующие по переменным $x = (x_1, \dots, x_n)$, x принадлежит области D . Функции $f(t, x)$, $w_a(x)$, $w_b(x)$ и постоянные a, b предполагаются известными, знак $*$ обозначает свертку по x :

$$f(t, x) * \lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x - \xi) \lambda(\xi) d\xi$$

Данную задачу можно рассматривать как задачу управления переводом субстанции $w(x, t)$ из состояния $w_a(x)$ в состояние $w_b(x)$. Операторы A и B определяют протекающий процесс, функция $\lambda(x)$ является элементом управления. Приведем сначала формальный результат, считая, что все нижеприведенные операции имеют смысл

Теорема 1. Пусть данные обратной задачи (1), (2) $w_a(x)$, $w_b(x)$ и функция $f(x, t)$ представимы в виде

$$w_a(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}_a(\xi) e^{ix\xi} d\xi, \quad w_b(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}_b(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

$$f(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi, t) e^{ix\xi} d\xi,$$

где $\hat{w}_a(\xi)$, $\hat{w}_b(\xi)$, $\hat{f}(\xi, t)$ — некоторые функции. Тогда функции, определенные формулами

$$w(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{w}_b(\xi) \int_a^t \hat{f}(\tau, \xi) e^{\frac{A(\xi)}{B(\xi)}(t-b-\tau)} d\tau + \hat{w}_a(\xi) \int_t^b \hat{f}(\tau, \xi) e^{\frac{A(\xi)}{B(\xi)}(t-a-\tau)} d\tau}{\int_a^b \hat{f}(\tau, \xi) e^{-\frac{A(\xi)}{B(\xi)}\tau} d\tau} e^{ix\xi} d\xi \quad (3)$$

$$\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{w}_b(\xi) e^{-\frac{A(\xi)}{B(\xi)}b} - \hat{w}_a(\xi) e^{-\frac{A(\xi)}{B(\xi)}a}}{\int_a^b \hat{f}(\tau, \xi) e^{-\frac{A(\xi)}{B(\xi)}\tau} d\tau} B(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (4)$$

удовлетворяют уравнениям (1), (2).

Получены достаточные условия корректности формул (3), (4).