Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЕЙ

А.Х. Бегматов*, З.Х. Очилов**

* СамГУ,
Университетский бульвар, 15,
140003 Самарканд, Узбекистан
E-mail: akrambegmatov@mail.ru

** СамГУ,
Университетский бульвар, 15,
140003 Самарканд, Узбекистан
E-mail: zochilov@mail.ru

В работе рассматриваются h-отобображения областей, ограниченных жордановыми кривыми (см [1,2]). Мы будем называть h-конформные отображениями просто h-отображениями.

Пусть D-область, ограниченна кривой , которая состоит из четырех частей: $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$

$$C_1 = \{(x, y) : y = f_1(x), x \in [0, 1], f_1(0) = \frac{1}{2}, f_1(1) = 1\}$$

$$C_2 = \{(x, y) : y = f_2(x), x \in [0, 1], f_2(0) = 0, f_1(1) = 1\}$$

$$C_3 = \{(x, y) : y = f_3(x), x \in [-1, 0], f_3(0) = 0, f_1(-1) = 1\}$$

$$C_4 = \{(x, y) : y = f_4(x), x \in [-1, 0], f_4(-1) = 0, f_1(0) = \frac{1}{2}\}$$

Все функции $f_n(x), n = \overline{1, 4}$ монотонны и непрерывны.

Область D имеет вид:

$$D = \{(x, y) : f_1^* < y < f_2^*, x \in [-1, 1]\},$$

где функции $f_k^*(x), (k = 1, 2)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$1) f_1^*(x) = f_2^*(x), -1 \le x \le 1 \tag{1}$$

$$2) f_k^*(-x) = f_k^*(x) \tag{2}$$

$$3) f_k^*(-1) = f_k^*(1) = 1,\ f_2^*(0) = 0,\ f_1^*(0) = \frac{1}{2} \tag{3}$$

Рассмотрим h-отображения областиD, осуществляемые функциями $u = \varphi(x), v = \varphi(y)$.

Пусть обратными к ним будут функции $x = \varphi_1(u), y = \psi_1(v)$ соответственно.

h-отображения, которые осуществляются функциями $u = \varphi(x)$ и $v = \varphi(y)$, переводят область D в область D_1 плоскости (u, v):

$$D_1 = \{(u, v) : F_1(u) < v < F_2(u)\}.$$

Здесь функции $F_k(u), k = 1, 2$ определяются следующим образом:

$v = \psi(y) = \psi(f_k^*(x)) = \psi(f_k^*(\varphi_1(u))) = F_k(u),\ k = 1, 2.$

Определенное таким образом отображение переводит область D в область D_1 плоскости (u, v), ограниченную углом

$$v = F - 1(u) = |u|,\ u \in [-1, 1]$$

и кривой

$$v = F_2(u),\ F_2(-1) = F_2(1) = 1,\ F_2(0) = \frac{1}{2},\ u \in [-1, 1].$$

Рассмотрим теперь h-отображение, переводящее область D_1 в область D_2 плоскости (u_1, v_1):

$$D_2 = \{(u_1, v_1) : F_1(u_1) < v_1 < F_2(u_1).$$

Область D_2 ограничена двумя углами:

$$F_1(u_1) = |u_1|,\ u_1 \in [-1, 1]$$

$$F_2(u_1) = \frac{1}{2}|u_1| + \frac{1}{2},\ u_1 \in [-1, 1]$$

Пусть это отображение определяется функциями $u_1 = \varphi_2(u)$ и $v_1 = \psi_2(v)$. Обратные к ним функции обозначим через $u = \varphi_3(u_1)$ и $v = \psi_3(v_1)$ соответственно. Из того, что отображение переводит область D_1 в D_2 следует, что эти функции связаны соотношениями.

$$v_1 = \psi_2\{\psi_3[F_k(u_1)]\} = \mathcal{F}_k(u_1),$$

$$\psi_2[|\varphi_3(u_1)|] = |u_1|,$$
$$|\varphi_3(u_1)| = \psi_3(|u|),$$
$$\psi_2\{F_k[\phi_3(u_1)]\} = \mathcal{F}_k(u_1),$$
$$F_k[\varphi_3(u_1)] = \psi_3[\mathcal{F}_k(u_1)].$$

В качестве функции $\mathcal{F}_1(u_1))$ можно взять функцию

$$\mathcal{F}_1(u_1) = |u_1|, u_1 \in [-1, 1]$$

а в качестве функции $\mathcal{F}_2(u_1)$ - взять функцию $\mathcal{F}_2(u_1) = \frac{1}{2}(u_1) + \frac{1}{2}$. Таким образом доказана теорема.

Теорема 1. Для любой области D плоскости (x, y), для которой функция $f_k^*(x),\ (k = 1, 2)$ удовлетворяет условиям (1)-(3), существует h-отображение D на области D_2 плоскости (u_1, v_1), ограниченной функцией $v_1 = |u_1|$ и $v_1 = \frac{1}{2}|u_1| + \frac{1}{2}$

И тем самым, получена теорема о возможности h-отображений на каноническую область для одного класса ограниченных областей, симметричных по отношению к оси (y).

Перейдем к рассмотрению обратной задачи для области, удовлетворяющей условиям, приведенным в теореме 1. Очевидно, что если функции $\varphi_k(y);\ k = 1, 2$ являются обратными по отношению к функциям $f_k^*(x),\ (k = 1, 2)$, т.е. $\varphi_k[f_k^*(x)] = x$, то

$$D = \{(x, y) : \varphi_2(y) < x < \varphi_1(y),\ y \in [0, 1]\}$$

Обозначим

$$u^*(x) = f_2^*(x) - f_1^*(x),$$
$$v^*(y) = \varphi_1(y) - \varphi_2(y))$$

Обратная задача. Требуется определить функции или по заданным функциям.

Теорема 2. Решение сформулированной обратной задачи единственно.

Литература

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М: Наука, 1977.

2. Лаврентьев М.М. Математические задачи томографии и гиперболические отображения // Сиб. мат. журнал. 2001. Том 42, № 5. С. 1094–1105.