О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА.

Борисов Ю.В.

р.Башкортостан, г. Стерлитамак, пр. Ленина 37, Стерлитамакская государственная педагогическая академия, кафедра математического анализа.

liliya_umag@rambler.ru

Получены достаточные условия существования и единственности решения нелинейных обратных задач для параболического уравнения вырождающихся при определённых условиях.

It is obtained sufficient conditions of stability of nonlinear inverse problems for the pharabolic equation in the degenerate case.

Пусть D - ограниченная область пространства R^n, $Q = D \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$ - цилиндр, Γ - гладкая (для простоты - бесконечно дифференцируемая) граница области D, $S = \Gamma \times (0, T)$ - боковая граница цилиндра Q. Функции $h(x, t)$, $f(x, t)$ и $\mu(x, t)$ заданы в $\bar{Q}$, функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ заданы при $x \in \bar{D}$ и $K(t)$ задана при $t \in [0, T]$.

Обратная задача: *найти функции $u(x, t)$, $q(x)$ и $q_0(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением*

$$K(t)u_t - \Delta u + q(x)u = q_0(x)h(x, t) + f(x, t), \tag{1}$$

причём для функции u(x,t) должны выполняться условия

$$u(x, t) \mid_S = \mu(x, t), \tag{2}$$

$$u(x, t_1) = u_1(x), \quad x \in D, \quad 0 < t_1 < T, \tag{3}$$

$$u(x, t_2) = u_2(x), \quad x \in D, \quad 0 < t_1 < t_2 \leq T, \tag{4}$$

Разрешимость обратных задач с вырождением, подобных обратной задаче (1)-(4), но с известной правой частью и неизвестным лишь коэффициентом $q(x)$ ранее изучалась в работах [1], [2], [3]. Задачи с неизвестным коэффициентом $q(x)$ и неизвестной правой частью уравнения указанного выше вида, но без вырождения в уравнении, изучались в работах [4], [5]. В настоящей работе уравнение наряду с неизвестными решением $u(x, t)$ и коэффициентом $q(x)$ содержит в правой части также неизвестную функцию $q_0(x)$. Отметим также, что в работах [3]-[5] функция

$K(t)$ была тождественно равна единице. В рамках этой работы функция $K(t)$ определяется следующим образом:

$$K(t) > 0, \quad t \in (0, T], \quad K(0) = 0. \tag{5}$$

Метод исследования данных обратных задач близок к подходу [6], он основан на регуляризации, далее на переходе к прямой задаче, путем исключения функций $q(x), q_0(x)$. Далее исследуется полученная прямая задача, выполняется предельный переход и строится решение исходной обратной задачи.

Произведём регуляризацию функции $K(t)$. Введём в рассмотрение функцию $K_\varepsilon(t) = K(t) + \varepsilon$, где ε - некоторое положительное число из полуинтервала $(0, \varepsilon_0]$, ε_0 - фиксированное положительное число. Пусть

$$V = \{v(x,t) : v(x,t) \in L_\infty(Q) \cap L_\infty(0,T; W_2^1(D)), \sqrt{K(t)} v_t(x,t) \in L_2(Q),$$

$$v_{x_i x_i}(x,t) \in L_2(Q), i = 1, ..n\},$$

норму в этом пространстве определим равенством

$$\|v(x,t)\|_V = \operatorname{vrai}\max_Q |v| + \operatorname{vrai}\max_{0 \le t \le T} \sum_{i=1}^n \int\limits_D v_{x_i}^2 dx +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_D \left[\sum_{i=1}^n v_{x_i x_i}^2 + K(t) v_t^2 \right] dx dt,$$

далее определим пространство функций H:

$$H = \{u(x,t) : u(x,t) \in V, u_t(x,t) \in V\}$$

с нормой

$$\|u\|_H = \|u\|_V + \|u_t\|_V.$$

Пусть выполнено условие:

$$\exists U(x,t) \in H, \quad U(x,t)|_S = \mu(x,t). \tag{6}$$

Введём обозначения:

$$w_1(x) = u_1(x) - U(x, t_1), \quad w_2(x) = u_2(x) - U(x, t_2),$$

$$h_0(x) \equiv h(x, t_1)[w_2(x) + U(x, t_2)] - h(x, t_2)[w_1(x) + U(x, t_1)],$$

$$\tilde{f}(x,t) = f(x,t) - K_\varepsilon(t) U_t(x,t) + \Delta U(x,t),$$

$$\alpha_0(x) = \frac{-h(x,t_1)(\tilde{f}(x,t_2) + \Delta u_2(x)) + h(x,t_2)(\tilde{f}(x,t_1) + \Delta u_1(x))}{h_0(x)},$$

$$\alpha_{1\varepsilon}(x) = \frac{-h(x,t_2)K_\varepsilon(t_1)}{h_0(x)}, \quad \alpha_{2\varepsilon}(x) = \frac{h(x,t_1)K_\varepsilon(t_2)}{h_0(x)},$$

$$\beta_0(x) = \frac{[w_1(x) + U(x,t_1)](\tilde{f}(x,t_2) + \Delta w_2(x))}{h_0(x)} -$$

$$- \frac{[w_2(x) + U(x,t_2)](\tilde{f}(x,t_1) + \Delta w_1(x))}{h_0(x)},$$

$$\beta_{1\varepsilon}(x) = \frac{[w_2(x) + U(x,t_2)]K_\varepsilon(t_1)}{h_0(x)}, \quad \beta_{2\varepsilon}(x) = \frac{-[w_1(x) + U(x,t_1)]K_\varepsilon(t_2)}{h_0(x)},$$

$$a_0 = \operatorname{vrai}\min_{\bar{Q}}(\alpha_0(x) + K'(t)),$$

$$A_1 = \operatorname{vrai}\max_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0}\{\operatorname{vrai}\max_{D}|\alpha_{1\varepsilon}(x)|\}, \quad A_2 = \operatorname{vrai}\max_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0}\{\operatorname{vrai}\max_{D}|\alpha_{2\varepsilon}(x)|\},$$

$$B_1 = \operatorname{vrai}\max_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0}\{\operatorname{vrai}\max_{D}|\beta_{1\varepsilon}(x)|\}, \quad B_2 = \operatorname{vrai}\max_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0}\{\operatorname{vrai}\max_{D}|\beta_{2\varepsilon}(x)|\},$$

$$K_1 = \frac{\operatorname{vrai}\max_{Q}|\beta_0(x)h_t(x,t) + \tilde{f}_t(x,t) + \alpha_0(x)U_t(x,t)|}{a_0 - m_0 - (B_1 + B_2)\operatorname{vrai}\max_{\bar{Q}}|h_t(x,t)| - (A_1 + A_2)\operatorname{vrai}\max_{\bar{Q}}|U_t(x,t)|}.$$

Считая функцию $v(x,t)$ известной, введем в рассмотрение следующие функции

$$c_{v\varepsilon}(x) = \alpha_0(x) + \alpha_{1\varepsilon}(x)v(x,t_1) + \alpha_{2\varepsilon}(x)v(x,t_2),$$

$$F_{v\varepsilon}(x,t) = [\beta_0(x)+\beta_{1\varepsilon}(x)v(x,t_1)+\beta_{2\varepsilon}(x)v(x,t_2)]h_t(x,t)+\tilde{f}_t(x,t)-c_{v\varepsilon}(x)U_t(x,t).$$

Рассмотрим вспомогательную прямую краевую задачу, с помощью которой мы в дальнейшем построим решение исходной обратной задачи: *найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$K_\varepsilon(t)v_t - \Delta v + c_{v\varepsilon}(x)v + K'(t)v = F_{v\varepsilon}(x,t), \tag{7}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$v(x,t)\mid_S = 0 \tag{8}$$

$$v(x,0) = 0. \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (1) *функция* $K(t)$ *принадлежит пространству* $C^2([0,T])$, *функция* $f(x,t)$ *такова, что* $f(x,t) \in L_\infty(Q)$, $f_t(x,t) \in L_\infty(Q)$, $f_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$, *функция* $h(x,t)$ *такова, что* $h(x,t) \in L_\infty(Q)$, $h_t(x,t) \in L_\infty(Q)$, $h_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$. *Кроме того, пусть функция* $u_1(x) \in W_2^2(D) \cap L_\infty(D)$, *и функция* $u_2(x) \in W_2^2(D) \cap L_\infty(D)$. *Пусть выполняется неравенство*

$$h_0(x) \geq h_0 > 0, \quad x \in \bar{D}, \tag{10}$$

и условия

$$a_0 > \operatorname{vrai}\max_{Q} |h_t(x,t)|(B_1 + B_2) + \operatorname{vrai}\max_{Q} |U_t(x,t)|(A_1 + A_2), \tag{11}$$

$$\alpha_0(x) + \frac{1}{2}K'(t) \geq a_0, \quad (x,t) \in \bar{Q}, \tag{12}$$

$$u_1(x) = \mu(x,t_1), \quad u_2(x) = \mu(x,t_2), \quad x \in \Gamma. \tag{13}$$

Пусть также для некоторого положительного числа m_0, *такого что*

$$m_0 < a_0 - \operatorname{vrai}\max_{Q}\{|h_t(x,t)|(B_1 + B_2) + |U_t(x,t)|(A_1 + A_2)\}, \tag{14}$$

выполняется неравенство

$$(A_1 + A_2)K_1 \leq m_0. \tag{15}$$

Тогда обратная задача (1)-(4) *имеет решение* $\{u(x,t), q(x), q_0(x)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in H, \quad q(x) \in L_\infty(D), \quad q_0(x) \in L_\infty(D)$.

Далее нами будет доказана теорема единственности решения обратной задачи (1)-(4).

Для функций $u_i(x,t) \in H, i = 1,2$ определим функции $z(x,t), \varphi_1(x,t)$, $\varphi_2(x,t)$ и $F_2(x,t)$:

$$z(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t),$$

$$\varphi_1(x,t) = h_t(x,t)\beta_1(x) - u_{2t}(x,t)\alpha_1(x),$$

$$\varphi_2(x,t) = h_t(x,t)\beta_2(x) - u_{2t}(x,t)\alpha_2(x),$$

$$F_2(x,t) = \varphi_1(x,t)z_t(x,t_1) + \varphi_2(x,t)z_t(x,t_2).$$

Введем вспомогательные обозначения:

$$K_i = \operatorname{vrai}\max_{\bar{Q}} |\varphi_i|, \quad i = 1,2.$$

Теорема 2. *Пусть* $\{u_1(x,t), q_1(x), q_{01}(x)\}$ *и* $\{u_2(x,t), q_2(x), q_{02}(x)\}$ *- два решения обратной задачи* (1)-(4) *такие, что* $u_i(x,t) \in H$, $q_i(x), q_{0i}(x) \in L_\infty(D), i = 1,2$ *и выполнены условия теоремы 1. Пусть выполнены следующие условия*

$$q_i(x) + \frac{K'(t)}{2} \geq b_0 > 0, \quad q_i(x) \geq b_1 > 0, \quad i = 1,2, \tag{16}$$

$$\operatorname{vrai}\max_{\bar{Q}} |u_{it}| \leq K_0, \quad i = 1,2, \tag{17}$$

$$\frac{K(t_i)}{2} - \frac{(t_1+t_2)K_i^2}{b_0} > 0, \quad i = 1,2. \tag{18}$$

Тогда $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$, *в* $\bar{Q}$ *и* $q_1(x) \equiv q_2(x)$, $q_{01}(x) \equiv q_{02}(x)$ в $\bar{D}$.

Список литературы

[1] Борисов Ю.В. *О разрешимости нелинейной вырождающейся обратной задачи для параболического уравнения.* //Современные проблемы физики и математики: труды всеросийской научной конференции. /Уфа: Гилем, 2004. - Т. 1. - С. 18 - 23.

[2] Борисов Ю.В. *О разрешимости некоторых нелинейных обратных задач для вырождающегося параболического уравнения.* //Региональная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике. /Уфа: БашГУ, 2004. - Т. 1. - С. 16 - 30.

[3] Борисов Ю.В *О разрешимости одной обратной задачи с вырождением.* //Вестник Новосибирского государственного университета. - 2004. Т. 4., выпуск 3/4, С. 17 - 22.

[4] Kozhanov A.I. *On solvability of an inverse problem with an unknown coefficient and right-hand side for a parabolic equation.* // J.Inv.Ill-Posed Problems, No. 6, pp. 611 - 630.

[5] Kozhanov A.I. *An inverse problem with an unknown coefficient and right-hand side for a parabolic equation.* // J.Inv.Ill-Posed Problems, No. 5, pp. 505 - 522.

[6] Кожанов А.И. *Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи.* //Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2004. Т.44, - № 4,С. 722-744.

[7] *Функциональный анализ.* // Под ред. С.Г.Крена.М.: Наука, 1964.