ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Борисова Л.Ф.

р.Башкортостан,г. Стерлитамак, Стерлитамакская государственная педагогическая академия, пр. Ленина 37, кафедра математического анализа.

liliya_umag@rambler.ru

Получены достаточные условия существования и единственности решения обратных задач для параболических уравнений высокого порядка.

It is obtained sufficient conditions of stability of inverse problems for the high-degree pharabolic equation.

Пусть Q – есть прямоугольник

$$\{(x,t) : x \in D = (0,1), t \in (0,T), 0 < T < +\infty\},$$

$f(x,t), \varphi_0(t), \varphi_1(t), \psi_0(t), \psi_1(t), u_0(x), u_1(x)$ – заданные при $x \in \bar{D}$ и $t \in [0,T]$ функции.

Обратная задача: Найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_t(x,t) + u_{xxxx}(x,t) + \lambda u(x,t) + c(x,t)q(x)u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

при выполнении условий

$$u(0,t) = \varphi_0(t), \quad u(1,t) = \varphi_1(t), \quad t \in (0,T), \tag{2}$$

$$u_x(0,t) = \psi_0(t), \quad u_x(1,t) = \psi_1(t), \quad t \in (0,T), \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(x,T) = u_1(x), \quad x \in D. \tag{4}$$

Подобная обратная задача в случае $c(x,t) \equiv 1$ и при условии интегрального переопределения рассматривалась ранее в работе Кирилловой Г. А. [1].

Пусть H есть следующее пространство:

$$H = \{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^{4,1}(Q) \cap L_\infty(0,T; W_2^2(D)),$$

$$v_t(x,t) \in W_2^{4,1}(Q) \cap L_\infty(0,T; W_2^2(D))\}$$

с нормой

$$\|v\|_H = \|v\|_{W_2^{4,1}(Q)} + \|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(D))} + \|v_t\|_{W_2^{4,1}(Q)} + \|v_t\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(D))}.$$

Всюду ниже будем считать выполненными условия

$$u_1(x) \geq k > 0, \quad x \in [0,1]. \tag{5}$$

$$c(x,t) \geq c_0 > 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{6}$$

Определим функции и постоянные, которые понадобятся нам при исследовании разрешимости обратной задачи (1)-(4)

$$U(x,t) = [\psi_0(t) + \psi_1(t) - 2\varphi_1(t) + 2\varphi_0(t)]x^3 +$$

$$+[3\varphi_1(t) - 3\varphi_0(t) - \psi_1(t) - 2\psi_0(t)]x^2 + \psi_0(t)x + \varphi_0(t),$$

$$c_\lambda(x,t) = \lambda + c(x,t)(h(x) + g(x)U_t(x,T)),$$

$$\tilde{u}_1(x) = u_1(x) - U(x,T),$$

$$h(x) = \frac{f(x,T) - u_1^{(4)}(x) - \lambda u_1(x)}{c(x,T)u_1(x)},$$

$$g(x) = -\frac{1}{c(x,T)u_1(x)},$$

$$\alpha(x) = -c(x,0)g(x)u_0(x),$$

$$\beta(x) = f(x,0) - u_0^{(4)}(x) - \lambda u_0(x) - c(x,0)h(x)u_0(x) +$$

$$+\alpha(x)U_t(x,T) - U_t(x,0),$$

$$F_0(x,t) = f_t(x,t) - 2c_t(x,t)(h(x) + g(x)U_t(x,T))U(x,t) -$$

$$-2c(x,t)(h(x) + g(x)U_t(x,T))U_t(x,t) - c_t(x,t)h(x)U(x,t) -$$

$$-c(x,t)h(x)U_t(x,t) - U_{tt}(x,t) - U_{xxxxt}(x,t) - \lambda U_t(x,t).$$

$$F_1(x,t) = -c_t(x,t)[h(x) + g(x)U_t(x,T)],$$

$$F_2(x,t) = -c(x,t)g(x)U_t(x,t) - c_t(x,t)g(x)U(x,t),$$

$$\lambda_0 = \operatorname{vrai}\min_{(x,t)\in\bar{Q}} c_\lambda(x,t), \quad h_0 = \operatorname{vrai}\min_{x\in\bar{D}} h(x), \quad m_0 = c_0 k h_0,$$

$$\alpha_0 = \operatorname{vrai}\max_{x\in\bar{D}} |\alpha(x)|, \quad \alpha_1 = \operatorname{vrai}\max_{x\in\bar{D}} \alpha'(x), \quad \alpha_2 = \operatorname{vrai}\max_{x\in\bar{D}} \alpha''(x),$$

$$k_1 = \operatorname{vrai}\max_{(x,t)\in\bar{Q}} |c_t(x,t)g(x)|,$$

$$\overline{F_i} = \operatorname{vrai}\max_{(x,t)\in\bar{Q}} F_i(x,t), \quad i = 1,2,$$

$$K_1 = \frac{2}{1-\alpha_0^2}\int_0^1 \alpha^2(x)\beta^2(x)dx + \int_0^1 \beta^2(x)dx + \frac{6}{\lambda_0}\int_0^T\int_0^1 F_0^2(x,t)dxdt,$$

$$K_{11} = \frac{2}{\min\{1-\alpha_0^2, 2\lambda_0\}} \left((2T^2+1)K_1 + 4T \int\limits_0^1 \tilde{u}_1^2(x)dx \right),$$

$$K_{12} = \frac{1}{\min\{1-\alpha_0^2, 4\}}(4\lambda_0 K_1 + \frac{6(1+\alpha_0^2)^2}{\alpha_0^2(1-\alpha_0^2)} \int\limits_0^1 [\beta''(x)]^2 dx +$$

$$+8 \int\limits_0^1 c(x,0)h(x)\beta^2(x)dx + 4 \int\limits_0^1 c^2(x,0)g^2(x)\beta^4(x)dx),$$

$$K_{13} = 4(\lambda_0^2+1)K_{11} + 4K_{12} + 6 \int\limits_0^T \int\limits_0^1 F_0^2(x,t)dxdt,$$

$$K_2 = 6(\overline{F_1}^2 + \overline{F_2}^2 T) + 2k_1^2 m_0^2,$$

$$K_{21} = \frac{4(2T^2+1)K_2}{\min\{1-\alpha_0^2, 2\lambda_0\}}, \quad K_{22} = \frac{4(K_2+1)}{\min\{1-\alpha_0^2, 4\}},$$

$$K_{23} = 4(\lambda_0^2+1)K_{21} + 4K_{22} + K_2.$$

Основные результаты работы сформулируем в виде двух теорем.

Теорема 1. *Пусть для функций* $f(x,t)$, $c(x,t)$, $c_t(x,t)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $f(x,T) - u_1^{(4)}(x) - \lambda u_1(x)$ *выполняются включения* $f(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $c(x,t) \in L_\infty(Q)$, $c_t(x,t) \in L_2(Q)$, $\varphi_0(t) \in W_2^2(0,T)$, $\varphi_1(t) \in W_2^2(0,T)$, $\psi_0(t) \in W_2^2(0,T)$, $\psi_1(t) \in W_2^2(0,T)$, $u_0(x) \in W_2^6(D)$, $u_1(x) \in W_2^6(D)$, $f(x,T) - u_1^{(4)}(x) - \lambda u_1(x) \in L_\infty(D)$. *Кроме того, пусть выполняются условия*

$$|\alpha(x)| \le \alpha_0 < 1, \quad h_0 > 0, \tag{7}$$

$$c(x,T) - 2c(x,0)\alpha^2(x) \ge 0, \quad x \in \bar{D}, \tag{8}$$

$$c_t(x,t) \ge 0, \quad (x,t) \in \bar{Q}, \tag{9}$$

$$\lambda_0 \ge \frac{3(1+\alpha_0^2)^2(8\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_0^2\alpha_2^2)}{\alpha_0^2(1-\alpha_0^2)^3} > 0, \tag{10}$$

$$K_{21} < 1, \quad K_{12} + K_{22}\frac{K_{11}}{1-K_{21}} \le m_0^2, \tag{11}$$

условия (5), (6) *и условия согласования*

$$u_0(0) = \varphi_0(0), \quad u_0'(0) = \psi_0(0), \quad u_0(1) = \varphi_1(0), \quad u_0'(1) = \psi_1(0),$$

$$u_1(0) = \varphi_0(T), \quad u_1'(0) = \psi_0(T), \quad u_1(1) = \varphi_1(T), \quad u_1'(1) = \psi_1(T),$$

Тогда обратная задача (1)-(4) *имеет решение* $\{u(x,t), q(x)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in H, q(x) \in L_\infty(D)$.

Теорема 2. *Пусть* $\{u(x,t), q(x)\}$ *и* $\{\tilde{u}(x,t), \tilde{q}(x)\}$ *– два решения обратной задачи* (1)–(4), *причем* $u(x,t) \in H$, $\tilde{u}(x,t) \in H$, $q(x) \geq 0$, $\tilde{q}(x) \geq 0$ *при* $x \in D$. *Пусть также выполняются условия*

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^1 \tilde{u}^2(x,t)dxdt \leq \tilde{A}_1, \quad \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \tilde{u}_t^2(x,t)dxdt \leq \tilde{A}_2, \tag{12}$$

$$\frac{1-\alpha_0^2}{2} - \frac{3}{\lambda}[K_1^2\tilde{A}_1 + K_2^2\tilde{A}_2] \geq 0, \tag{13}$$

$$c_t(x,0) \leq 0, x \in D, \quad c_{tt}(x,t) \leq 0, x \in Q. \tag{14}$$

Тогда $u(x,t) \equiv \tilde{u}(x,t)$ *в* $\bar{Q}$, $q(x) \equiv \tilde{q}(x)$ *в* $\bar{D}$.

Список литературы

[1] *Кириллова Г.А.* Обратная задача для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом при решении в случае интегрального переопределения. //Математические заметки ЯГУ. 2003. Т.10, №1. С. 34-44.

[2] *Кожанов А.И.* Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений. //Сибирский журнал индустриальной математики, январь-март, том VII, №1(17). С. 51-60.