Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Многомерная обратная задача определения параметров изотропной среды в шаре

Т.В. Бугуева*

* ИМ СО РАН,
пр. Ак. Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: bugueva@math.nsc.ru

Работа была поддержана грантами РФФИ 05-01-00171, 05-01-00559, грантом Президента РФ НШ-7157.2006.1, междисциплинарным интеграционным проектом СО РАН, N48.

В настоящей работе изучается обратная динамическая задача линейной изотропной упругости в шаровой области. Исследование проводится с помощью метода линеаризации, а именно, предполагается, что плотность среды $\rho(r)$ зависит только от радиальной переменной, а скорости распространения продольных $c(r,\theta,\varphi)$ и поперечных волн $a(r,\theta,\varphi)$ представимы в виде $a^2(r,\theta,\varphi) = a_0^2 + a_1(r,\theta,\varphi)$, $c^2(r,\theta,\varphi) = c_0^2 + c_1(r,\theta,\varphi)$, где a_0^2, c_0^2 – некоторые известные константы, а $a_1(r,\theta,\varphi)$, $c_1(r,\theta,\varphi)$ – неизвестные функции, малые по сравнению с константами a_0^2 и c_0^2, соответственно.

Рассмотрим систему уравнений упругости для изотропной среды, записанную следующим образом

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{u} + \frac{\lambda+\mu}{\rho}\nabla\,\mathrm{div}\;\vec{u} + \frac{\nabla\lambda}{\rho}\,\mathrm{div}\;\vec{u} + \frac{\nabla\mu}{\rho}\cdot(\nabla\vec{u} + \vec{u}\nabla) \tag{1}$$

вместе с начальными данными

$$\vec{u}|_{t<0} = 0 \tag{2}$$

и граничным условием

$$\sigma_r|_{r=r_0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\vec{l}\theta(t), \tag{3}$$

здесь вектор напряжений σ_r, действующий на площадку с нормалью, параллельной оси e_r, $\sigma_r = \lambda\,\mathrm{e}_r\,\mathrm{div}\;\vec{u} + \mu\,\mathrm{e}_r\cdot(\nabla\vec{u} + \vec{u}\nabla)$; вектор $\vec{l}$ имеет координаты $(1,0,0)$ в сферическом базисе e_r, e_θ, e_φ; $1/\sqrt{4\pi}$ – нормирующая константа.

Пусть $\vec{h}(t,\theta,\varphi)$ – известная функция. В качестве дополнительной информации для решения обратной задачи рассмотрим

$$\vec{u}\,\Big|_{r=r_0} = \vec{h}(t,\theta,\varphi), \qquad t\in[0,T], \quad \nu(\theta,\varphi)\in\mathbf{S}^2,$$

здесь $\mathbf{S}^2 = \{\nu(\theta,\varphi)|\nu = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)\}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$.

Введем в рассмотрение следующие функции

$$a^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad b^2 = \frac{\lambda+\mu}{\rho}, \quad c^2 = a^2 + b^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}, \quad p = \ln\rho. \tag{4}$$

Из равенств (**??**) вытекают следующие соотношения

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{\rho} &= c^2 - 2a^2, \qquad \lambda = (c^2-2a^2)\rho, \qquad \mu = a^2\rho;\\
\frac{\nabla\lambda}{\rho} &= \frac{\nabla\lambda}{\lambda}\frac{\lambda}{\rho} = \nabla(c^2-2a^2) + (c^2-2a^2)\nabla p;\\
\frac{\nabla\mu}{\rho} &= \frac{\nabla\mu}{\mu}\frac{\mu}{\rho} = \nabla a^2 + a^2\nabla p.
\end{aligned} \tag{5}$$

Будем рассматривать случай, когда плотность среды зависит только от радиальной переменой r, $\rho \equiv \rho(r)$, тогда $p \equiv p(r)$, а параметры Ламе λ и μ есть функции всех пространственных переменных в сферической системе координат r, θ, φ.

Перепишем уравнение (**??**) в терминах функций a и c, учитывая равенства (**??**), (**??**)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} &= a^2 \Delta \vec{u} + (c^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} \vec{u} + \Big(\nabla (c^2 - 2a^2) + (c^2 - 2a^2) p'(r)\, \mathrm{e}_r \Big) \operatorname{div} \vec{u} + \\ &+ \Big(\nabla a^2 + a^2 p'(r)\, \mathrm{e}_r \Big) \cdot (\nabla \vec{u} + \vec{u} \nabla). \end{aligned}$$

Функция σ в терминах введенных функций a^2 и c^2 запишется следующим образом

$$\sigma_r = (c^2 - 2a^2) \rho\, \mathrm{e}_r \operatorname{div} \vec{u} + a^2 \rho\, \mathrm{e}_r \cdot (\nabla \vec{u} + \vec{u} \nabla).$$

Предположим, что функции $c^2(r, \theta, \varphi)$ и $a^2(r, \theta, \varphi)$ представимы в виде

$$a^2(r, \theta, \varphi) = a_0^2 + a_1(r, \theta, \varphi), \qquad c^2(r, \theta, \varphi) = c_0^2 + c_1(r, \theta, \varphi),$$

где a_0^2, c_0^2 – некоторые известные константы, а функции a_1, c_1 – неизвестные функции, малые по сравнению с константами a_0^2 и c_0^2, соответственно. Тогда естественно предположить, что функция $\vec{u}(t, r, \theta, \varphi)$, являющаяся решением прямой задачи (**??**)–(**??**), представима в виде

$$\vec{u}(t, r, \theta, \varphi) = \vec{u}^0(r, t) + \vec{u}^1(t, r, \theta, \varphi).$$

При этом информация о решении прямой задачи (**??**)–(**??**) представима в виде

$$\vec{h}(t, \theta, \varphi) = \vec{h}_0(t) + \vec{h}_1(t, \theta, \varphi),$$

где $\vec{h}_0(t)$ есть след функции $\vec{u}^0(t, r)$ при $r = r_0$, а функция $\vec{h}_1(t, \theta, \varphi)$ определена как $\vec{u}^1|_{r=r_0} = \vec{h}_1(t, \theta, \varphi)$.

Здесь функция $\vec{u}^0(t, r)$ есть решение задачи

$$\frac{\partial^2 \vec{u}^0}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta \vec{u}^0 + (c_0^2 - a_0^2) \nabla \operatorname{div} \vec{u}^0 + (c_0^2 - 2a_0^2) p'(r)\, \mathrm{e}_r \operatorname{div} \vec{u}^0 + a_0^2 p'(r)\, \mathrm{e}_r \cdot (\nabla \vec{u}^0 + \vec{u}^0 \nabla), \tag{6}$$

$$\vec{u}^0\big|_{t<0} = 0, \tag{7}$$

$$\sigma_r^0 \Big|_{r=r_0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \vec{l} \theta(t), \tag{8}$$

$$\vec{u}^0 \Big|_{r=r_0} = \vec{h}^0(t), \tag{9}$$

где

$$\sigma_r^0 = (c_0^2 - 2a_0^2) \rho(r)\, \mathrm{e}_r \operatorname{div} \vec{u}^0 + a_0^2 \rho(r)\, \mathrm{e}_r \cdot (\nabla \vec{u}^0 + \vec{u}^0 \nabla).$$

Функция $\vec{u}^1(t, r, \theta, \varphi)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{u}^1}{\partial t^2} &= a_0^2 \Delta \vec{u}^1 + (c_0^2 - a_0^2) \nabla \operatorname{div} \vec{u}^1 + (c_0^2 - 2a_0^2) p'(r)\, \mathrm{e}_r \operatorname{div} \vec{u}^1 + a_0^2 p'(r)\, \mathrm{e}_r \cdot (\nabla \vec{u}^1 + \vec{u}^1 \nabla) + \\ &+ a_1 \Delta \vec{u}^0 + (c_1 - a_1) \nabla \operatorname{div} \vec{u}^0 + \Big(\nabla (c_1 - 2a_1) + (c_1 - 2a_1) p'(r)\, \mathrm{e}_r \Big) \operatorname{div} \vec{u}^0 + \\ &+ \Big(\nabla a_1 \cdot (\nabla \vec{u}^0 + \vec{u}^0 \nabla) + a_1 p'(r)\, \mathrm{e}_r \Big) \cdot (\nabla \vec{u}^0 + \vec{u}^0 \nabla), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\vec{u}^1\big|_{t<0} = 0, \tag{11}$$

$$\sigma_r^1\big|_{r=r_0} = 0. \tag{12}$$

$$\vec{u}^1\big|_{r=r_0} = \vec{h}_1(t,\theta,\varphi). \tag{13}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\sigma_r^1 &= (c_0^2-2a_0^2)\rho(r)\,\mathrm{e}_r\,\mathrm{div}\ \vec{u}^1 + a_0^2\rho(r)\,\mathrm{e}_r\cdot(\nabla\vec{u}^1+\vec{u}^1\nabla)+\\ &\quad +(c_1-2a_1)\rho(r)\,\mathrm{e}_r\,\mathrm{div}\ \vec{u}^0 + a_1\rho(r)\,\mathrm{e}_r\cdot(\nabla\vec{u}^0+\vec{u}^0\nabla).\end{aligned}$$

Обратная задача 1. Пусть T, r_0, c_0, a_0 – заданные положительные константы; $0<T<2r_0/c_0$. Определить неизвестную функцию $p(r)$, входящую в равенства (**??**), (**??**), $p(r)=\ln\rho(r)$, если относительно решения $\vec{u}^0(t,r,\theta,\varphi)$ прямой задачи (**??**)–(**??**), известна информация (**??**), где $\vec{h}_0(t)$ – заданная функция при $t\in[0,T]$.

Обратная задача 2. Пусть T, r_0, c_0, a_0 – заданные положительные константы; $0<T<2r_0/c_0$. Определить неизвестные функции $a_1(r,\theta,\varphi)$ и $c_1(r,\theta,\varphi)$, входящие в равенства (**??**), (**??**), если относительно решения $\vec{u}^1(t,r,\theta,\varphi)$ прямой задачи (**??**)–(**??**), известна информация (**??**), где $\vec{h}_1(t,\theta,\varphi)$ – заданная функция при $t\in[0,T]$, $\nu(\theta,\varphi)\in\mathbf{S}^2$; функция $p(r)$ предполагается известной; функция $\vec{u}^0(t,r)$ – известна и является решением прямой задачи (**??**)–(**??**).

Доказаны теоремы единственности решений обратных задач 1 и 2.