Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Об одной обратной начально-краевой задаче

О.Н. Черепанова*, **И.В. Степанова****

* Сибирский Федеральный Университет, институт естественных и гуманитарных наук, факультет математики и информатики.
пр. Свободный, 79,
660041 Красноярск, Россия
E-mail: math-dean@lan.krasu.ru

** ИВМ СО РАН,
Академгородок, 50, стр. 44
660036 Красноярск, Россия
E-mail: stepiv@icm.krasn.ru

В области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z)| \quad 0 < t < T, \quad x \in [0,\pi], \quad z \in E_1\}$ рассматривается начально-краевая задача нахождения пары функций $u(t,x,z), \quad a(t,x)$, удовлетворяющих уравнению

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + a(t,x)u, \tag{1}$$

начальному условию

$$u|_{t=0} = u_0(x,z), \tag{2}$$

краевым условиям

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0 \tag{3}$$

и условию переопределения

$$u|_{z=0} = \varphi(t,x). \tag{4}$$

Функции $\varphi(t,x), \quad u_0(x,z)$ заданы и удовлетворяют условиям согласования

$$\varphi(0,x) = u_0(x,0), \quad x \in [0,\pi], \quad \varphi_x(t,0) = \varphi_x(t,\pi) = 0, \quad t \in [0,T].$$

Предположим, решение задачи (1)-(3) существует и функция u допускает преобразование Фурье по переменной [z]:

$$w(t,x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x,z)e^{-izy}dz, \tag{5}$$

$$u(t,x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t,x,y)e^{izy}dy. \tag{6}$$

При помощи условий (4), (5) задачу (1)-(3) можно свести к следующей начально-краевой задаче для интегродифференциального уравнения, не содержащего функцию $a(t,x)$

$$w_t = w_{xx} + w(\frac{\varphi_t - \varphi_{xx}}{\varphi} - y^2 - \frac{1}{\varphi}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 w dy), \tag{7}$$

Начальные условия для функции $w(t,x,y)$

$$w|_{t=0} = w_0(x,z). \tag{8}$$

Краевые условия для функции $w(t,x,y)$

$$w_x|_{x=0} = w_x|_{x=\pi} = 0. \tag{9}$$

Здесь$w_0(t,x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u_0(t,x,z)e^{-izy}dz$ преобразование Фурье функции u_0 по переменной z.

Предполагая, что функция $w(t,x,y)$ действительнозначна и имеет компактный носитель по переменной y, принадлежащим некоторому отрезку $[-\alpha,\alpha]$, понятно, что задача (7)-(9) равносильна следующей

$$w_t = w_{xx} + w(\frac{\varphi_t-\varphi_{xx}}{\varphi} - y^2 - \frac{1}{\varphi}\int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 w dy), \tag{10}$$

Начальные условия для функции $w(t,x,y)$

$$w|_{t=0} = w_0(x,z). \tag{11}$$

Краевые условия для функции $w(t,x,y)$

$$w_x|_{x=0} = w_x|_{x=\pi} = 0 \tag{12}$$

в полосе $G^{\alpha}_{[0,T]} = \{(t,x,z)|\ \ 0<t<T,\ \ x\in[0,\pi],\ \ z\in[-\alpha,\alpha]\}$.

Пусть выполнены условия

$$0<\mu\le|\varphi(t,x)|\le k_0;\quad \sum_{i=0}^{6}|\frac{\partial^i\varphi}{\partial x^i}|\le k_1;\quad \sum_{i=0}^{4}|\frac{\partial^i w_0}{\partial x^i}|\le k_2;$$

$$\sum_{i=0}^{2}|\frac{\partial^{i+1}w_0}{\partial x^i\partial y}|\le k_3;\quad \sum_{i=0}^{4}|\frac{\partial^{i+1}\varphi}{\partial t\partial x^i}|\le k_4. \tag{13}$$

Здесь $\mu,\quad k_i, i=0,..4$ заданные постоянные. А так же пусть $w_0(x,y)$- четная, кусочно-непрерывная функция, имеющая кусочно-непрерывную производную, тогда она может быть периодически продолжена на все пространство E_1, то есть может быть представлена рядом Фурье

$$w_0(x,y) = \Sigma_{i=0}^{\infty}\alpha_k coskx, \tag{14}$$

где α_k- коэффициенты разложения $w_0(x,y)$ в ряд Фурье.

С помощью метода слабой аппроксимации доказана следующая теорема

Теорема 1. При выполнении условий (13), (14) задача (10)-(12) имеет решение в классе функций $C^{0,1,2}(G^{\alpha}_{0,t^*})$.

Применяя обратное преобразование Фурье к задаче (10)-(12), видим, что пара функций

$$u(t,x,y) = Re\int_{-\alpha}^{\alpha} w(t,x,y)e^{izy}dy, \tag{15}$$

$$a(t,x) = \frac{\varphi_t-\varphi_{xx}-\int_{-\alpha}^{\alpha}y^2 w(t,x,y)dy}{\varphi} \tag{16}$$

есть решение обратной задачи (1)-(3) в классе функций $C^{0,1,2}(G^{\alpha}_{0,t^*})$. При выполнении условий

$$|\frac{\partial^i u}{\partial z^i}|\le C_2,\quad i=0..m,\forall m\ge0,\quad |\frac{\partial^i u_x}{\partial z^i}|+|\frac{\partial^i u_{xx}}{\partial z^i}|+|\frac{\partial^i u_t}{\partial z^i}|\le C_3 \tag{17}$$

доказана следующая теорема.

Теорема 2. При выполнении условий (13),(14) соотношения (15),(16) дают в полосе $C^{0,1,2}(G^{\alpha}_{0,t^*})$ классическое решение задачи (1)-(3). При выполнении условий (17) это решение единственное.