Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”, посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Обратные задачи для уравнений составного типа

А.И. Кожанов*

* ИМ СО РАН,
пр. Ак. Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: kozhanov@math.nsc.ru

Введение.

Обратными задачами в теории уравнений с частными производными принято называть такие задачи, в которых вместе с решением дифференциального уравнения требуется определить также тот или иной коэффициент(ы) самого уравнения, либо же правую часть (внешнее воздействие), либо же и коэффициент(ы) и правую часть. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для уравнений параболического и гиперболического типов; в исследование разрешимости таких задач существенный вклад внесли М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, Ю.Е. Аниконов, А.И. Прилепко, Ю.Я. Белов, Б.А. Бубнов, Н.Я. Безнощенко, Г.Н. Ерохин, М.И. Иванчов, С.И. Кабанихин, А. Лоренци, Дж. Кэннон, М. Клибанов, М. Ямамото. Значительно менее изученными являются обратные задачи для эллиптпческих уравнений, и совершенно не изученными представляются обратные задачи для неклассических уравнений. Частично восполнить последний пробел мы и попытаемся в рамках настоящего доклада.

I. Нелинейные обратные задачи для уравнений составного типа с неизвестными коэффициентами пространственного типа.

1. Пусть D есть интервал $(0,1)$ оси Ox, Q есть прямоугольник $\{(x,t) : x \in D, 0 < t < T < +\infty\}$, $b(x)$, $b_0(x)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $v_1(x)$ и $K(t)$ суть заданные при $x \in \overline{D}$, $t \in [0,T]$ функции, B есть оператор

$$Bu = b(x)u_{xx} + b_0(x)u.$$

Обратная задача I_1: *найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением*

$$u_t - u_{xxt} - Bu + q(x)u = f(x,t), \tag{1.1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in D, \tag{2.1}$$

$$u(0,t) = \varphi_0(t), \quad u(1,t) = \varphi_1(t), \quad 0 < t < T, \tag{3.1}$$

$$u(x,T) = u_1(x), \quad x \in D. \tag{4.1}$$

Обратная задача II_1: *найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением (1.1), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2.1) и (3.1), а также условия*

$$\int_0^T K(t)u(x,t)\,dt = v_1(x), \quad x \in D. \tag{5.1}$$

Определим пространства H_0 и V_0:

$$H_0 = \{v(x,t) : v(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(D)),\ v_t(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(D))\},$$

$$V_0 = \{v(x,t) :\, v(x,t) \in H_0,\ v_t(x,t) \in H_0\}.$$

Нормы в этих пространствах определим естественным образом

$$\|v\|_{H_0} = \|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(D))} + \|v_t\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(D))}, \quad \|v\|_{V_0} = \|v\|_{H_0} + \|v_t\|_{H_0}.$$

Метод исследования разрешимости обратной задачи I_1 основан на переходе к нелинейному нагруженному уравнению составного типа

$$w_t - w_{xxt} - Bw + q_w(x)(w+\Phi) = f_1(x,t),$$

$$q_w(x) = h_1(x) + h_2(x)[w_t(x,T) - w_{xxt}(x,T)].$$

($\Phi(x,t)$, $f_1(x,t)$, $h_1(x)$ и $h_2(x)$ — функции, определяемые входными данными задачи), доказательстве разрешимости первой начально-краевой задачи для него и далее — построению по найденной функции $w(x,t)$ решения исходной обратной задачи. Решение $\{u(x,t), q(x)\}$ обратной задачи будет таким, что выполняются включения $u(x,t) \in V_0$, $q(x) \in L_2(D)$.

Доказательство разрешимости обратной задачи I_2 проводится в целом по той схеме — вместо исходной обратной задачи рассматривается первая начально–краевая задача для нагруженного уравнения

$$w_t - w_{xxt} - Bw + h_3(x)w - \psi(x,w)(w+\Phi) = f_2(x,t),$$

$$\psi(x,w) = \frac{K(T)}{v_1(x)}[w(x,T) - w_{xx}(x,T)] - \frac{1}{v_1(x)}\int\limits_0^T K(t)[w(x,t) - w_{xx}(x,t)]\,dx,$$

устанавливается ее разрешимость и далее строится решение исходной обратной задачи; для решения $\{u(x,t), q(x)\}$ обратной задачи I выполняются включения $u(x,t) \in H_0$, $q(x) \in L_2(D)$.

2. В прямоугольнике Q рассмотрим обратные задачи для уравнения с кратными характеристиками. Пусть $a(x,t)$ есть заданная при $(x,t) \in \overline{Q}$ функция, λ — заданное положительное число.

Обратная задача II_1: *найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением*

$$u_t + u_{xxx} - u_{xx} + \lambda u + q(x)a(x,t)u = f(x,t), \tag{1.2}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in D, \tag{2.2}$$

$$u(0,t) = \varphi_0(t), \quad u(1,t) = \varphi_1(t), \quad u_x(1,t) = \psi_1(t), \quad 0 < t < T, \tag{3.2}$$

$$\int\limits_0^T K(t)u(x,t)\,dt = v_1(x). \tag{4.2}$$

Обратная задача II_2: *найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением (1.2), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2.2) и (3.2), а также условия*

$$u(x,T) = u_1(x), \quad x \in D. \tag{5.2}$$

Определим пространства H, H_1 и V:

$$H = W_2^{3,1}(Q) \cap L_\infty(0,T;W_2^1(D)),$$

$$H_1 = W_2^{6,1}(Q) \cap L_\infty(0,T;W_2^3(D)),$$

$$V = \{v(x,t) :\, v(x,t) \in H,\ v_t(x,t) \in H\}.$$

Для обратной задачи II_1 доказывается существование решения $\{u(x,t), q(x)\}$ такого, что $u(x,t) \in H$, $q(x) \in L_\infty(D)$, $q(x) \geq 0$. Метод доказательства основан на исследовании разрешимости краевой задачи для нелинейного нагруженного уравнения

$$w_t + w_{xxx} - w_{xx} + \lambda w + q(x,w)(w+U) = f_1(x,t), \tag{6.2}$$

$$w(x,0) = \overline{u}_0(x), \quad x \in D, \tag{7.2}$$

$$w(0,t) = w(1,t) = w_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{8.2}$$

$$q(x,w) = \frac{F(x) - \psi(x,w)}{\overline{a}_0 - \varphi(x,w)},$$

$$\varphi(x,w) = \int_0^T a_t(x,t)\left(\int_0^T K(\tau)w(x,\tau)\,d\tau\right)dt,$$

$$\psi(x,w) = K(T)w(x,T) - \int_0^T K'(t)w(x,t)\,dt,$$

$$F(x) = \int_0^T K(t)f(x,t)\,dt - K(T)U(x,T) + \int_0^T K'(t)U(x,t)\,dt +$$

$$+K(0)u_0(x) - u_{1xxx}(x) + v_{1xx}(x) - \lambda v_1(x)$$

($\overline{u}_0(x)$, $f_1(x,t)$, $U(x,t)$ и $\overline{a}_0$ определяются входными данными задачи) и построении далее с помощью функции $w(x,t)$ решения исходной обратной задачи.

В свою очередь, при доказательстве разрешимости краевой задачи (6.2)–(8.2) используется метод регуляризации (уравнение (6.2) регуляризуется уравнением шестого порядка). Для регуляризованного уравнения разрешимость устанавливается с помощью теоремы Шаудера; предельный переход по параметру регуляризации дает решение краевой задачи (6.2)–(8.2).

Разрешимость обратной задачи II_2 устанавливается при дополнительном ограничении

$$u_0(x) \equiv 0;$$

схема же доказательства остается прежней. Решение $\{u(x,t), q(x)\}$ обратной задачи II_2 будет таким, что $u(x,t) \in V$, $q(x) \in L_\infty(D)$, $q(x) \geq 0$.

II. Нелинейные обратные задачи для уравнений составного типа с неизвестными коэффициентами временного типа.

3. Рассмотрим обратные задачи для уравнения с кратными характеристиками с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени. Пусть теперь функция K зависит и от x и от t, $\mu(t)$ есть заданная на $[0,T]$ функция.

Обратная задача III_1: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением*

$$u_t + u_{xxx} + \lambda u + q(t)a(x,t)u = f(x,t), \tag{1.3}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in D, \tag{2.3}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = u_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{3.3}$$

а также условия

$$\int_0^1 K(x,t)u(x,t)\,dx = \mu(t), \quad 0 < t < T. \tag{4.3}$$

Обратная задача III_2: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением*

$$q(t)u_t + u_{xxx} + a(x,t)u = f(x,t), \tag{5.3}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2.3)–(4.3).

Разрешимость обратных задач III_1 и III_2 устанавливается с помощью перехода к прямой краевой задаче для нелинейного нагруженного уравнения; при исследовании разрешимости краевых задач для нагруженных уравнений используется метод регуляризации и теорема Шаудера.

4. Пусть D есть ограниченная область пространства R^n с гладкой границей Γ, Q есть цилиндр $D \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $a^{ij}(x)$, $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,\dots,n$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $u_0(x)$, $\mu(t)$ есть заданные при $x \in \overline{D}$, $t \in [0,T]$ функции, A и B есть операторы

$$Au = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x)u_{x_j}\right) + a_0(x)u,$$

$$Bu = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b^{ij}(x)u_{x_j}\right) + b_0(x)u.$$

Обратная задача IV_1: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением*

$$u_t - Au_t - Bu + q(t)u = f(x,t), \tag{1.4}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in D, \tag{2.4}$$

$$u(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)} = 0, \tag{3.4}$$

а также условия

$$\int\limits_D K(x,t)u(x,t)\,dx = \mu(t), \quad 0 < t < T. \tag{4.4}$$

Разрешимость обратной задачи (1.4)–(4.4) связана с разрешимостью следующей прямой краевой задачи для нагруженного уравнения

$$u_t - Au_t - Bu + q(t,u)u = f(x,t),$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in D,$$

$$u(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)} = 0,$$

$$q(t,u) = \frac{1}{\mu(t)}[\int\limits_D K(x,t)f(x,t)\,dx - \mu'(t) + \int\limits_D K_t(x,t)u(x,t)\,dx -$$

$$-\int\limits_D a^{ij}(x)K_{x_i}(x,t)u_{x_jt}\,dx - \int\limits_\Gamma K(x,t)a^{ij}(x)u_{x_jt}(x,t)\nu_i\,ds -$$

$$-\int\limits_D b^{ij}(x)K_{x_i}(x,t)u_{x_j}(x,t)\,dx - \int\limits_\Gamma K(x,t)b^{ij}(x)u_{x_j}(x,t)\nu_i\,ds].$$

Для доказательства же разрешимости данной краевой задачи используется метод регуляризации — именно, рассматривается краевая задача с положительным параметром ε

$$u_t - Au_t - Bu + q(t,u)u + \varepsilon A^{2p}u = f(x,t),$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in D,$$
$$u(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)} = Au(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)} = \ldots = A^p u(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)} = 0.$$

Здесь p — натуральное число такое, что $4p > n$. Используя теорему Шаудера, мы устанавливаем разрешимость данной задачи. Далее с помощью априорных оценок осуществляем предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Наконец, с помощью решения $u(x,t)$ прямой краевой задачи для нагруженного уравнения строим решение исходной обратной задачи.

5. Следующими примерами нелинейных обратных задач для уравнений составного типа являются: *задача нахождения решения $u(x,t)$ и коэффициента $q(t)$, связанных уравнением*

$$u_{tt} - Au_t - Bu + q(t)u_t = f(x,t), \tag{5.4}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in D, \tag{6.4}$$

$$u(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)} = 0, \tag{7.4}$$

$$\int\limits_D K(x,t)u(x,t)\,dx = \mu(t); \tag{8.4}$$

задача нахождения решения $u(x,t)$ и коэффициента $q(t)$, связанных уравнением

$$u_{tt} - Au_t - Bu + q(t)u = f(x,t), \tag{9.4}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (6.4)–(8.4).

Для данных задач доказываются теоремы существования регулярных решений, но при этом для задачи (9.4), (6.4)–(8.4) появляется ограничение $T < T^*$ с числом T^*, определяющимся входными данными задачи.