Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Прямые и обратные задачи для системы дифференциальных уравнений электромагнитоупругости

И.З. Меражов*

* ИВММГ СО РАН
пр. Ак. Лаврентьева, 6,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: maths@sibupk.nsk.su

Работа автора была поддержана РФФИ (грант 06-05-64265)

Рассмотрена полная система дифференциальных уравнений электромагнитоупругости сос-тоящая из следующих уравнений:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j},\quad i=1,2,3; \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}H=\frac{\partial D}{\partial t},\quad \mathrm{rot}E=-\mu\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{2}$$

Здесь $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$, $\rho=\rho(x)$ - плотность неоднородной среды, $\rho(x)>0$, $u=(u_1,u_2,u_3)$ - вектор смещений с компонентами $u_i=u_i(x,t)$, $i=1,2,3$, $E=(E_1,E_2,E_3)$ и $H=(H_1,H_2,H_3)$ -вектора электрической и магнитной напряженности с компонентами $E_i=E_i(x,t)$, $H_i=H_i(x,t)$, $i=1,2,3$, $D=(D_1,D_2,D_3)$ -вектор электрической напряженности с компонентами $D_i=D_i(x,t)$, $i=1,2,3$.

Для тензоров напряжений $T_{ij}(x,t)$ и деформаций $S_{kl}(x,t)$ и компонент электрической индукции $D_j(x,t)$ имеют место представления:

$$T_{ij}=\sum_{k,l=1}^{3}c_{ijkl}S_{kl}-\sum_{k=1}^{3}e_{kij}E_k,\quad i=1,2,3,\quad j=1,2,3, \tag{3}$$

$$S_{kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right),\quad k=1,2,3,\quad l=1,2,3, \tag{4}$$

$$D_j=\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{jk}E_k+\sum_{k,l=1}^{3}e_{jkl}S_{kl},\quad j=1,2,3. \tag{5}$$

$c_{ijkl}=c_{ijkl}(x)$ - модули упругости, $e_{kij}=e_{kij}(x)$ - пьезоэлектрические модули, $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(x)$ - диэлектрические модули, $\mu=\mu(x)$ - магнитная проницаемость.

Систему (1), (2) будем рассматривать совместно с условиями

$$u|_{t<0}=0,\quad E|_{t<0}=0,\quad H|_{t<0}=0, \tag{6}$$

Система (1), (2) описывает распространение связанных электроупругих волн. Связь упру-гих и электрических процессов определяется пьезоэлектрическими модулями среды. Так как тензоры c_{ijkl}, e_{kij}, ε_{ij} удовлетворяют следующим условиям симметричности

$$c_{ijkl}=c_{jikl}=c_{ijlk}=c_{klij},\quad e_{kij}=e_{kji},\quad \varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji},$$

удобно ввести новые обозначения, т.е. пару индексов (ij), относительно которых тензоры симметричны, заменим одним индексом p, принимающим значения от 1 до 6. Упорядочения здесь следующее:

$$(11) \to 1, \quad (22) \to 2, \quad (33) \to 3, \quad (23) = (32) \to 4, \quad (13) = (31) \to 5,$$

$$(12) = (21) \to 6, \qquad c_{ijkl} = c_{pq}, \quad e_{kij} = e_{kp}.$$

Набор характеристик электромагнитоупругой среды дается в литературе в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} c_{\alpha\beta}(6 \times 6) & e_{\alpha k}(6 \times 3) \\ e_{k\alpha}(3 \times 6) & \varepsilon_{ij}(3 \times 3) \end{pmatrix}.$$

В данной работе рассмотрены анизотропные среды кубической, тетрогональной и гексогональной структуры.

Показано, что систему электромагнитоупругости (1), (2) можно записать в виде t - гиперболической, симметрической по Фридрихсу системы уравнений первого порядка, т.е. в виде

$$A_0 \frac{\partial}{\partial t} U + \sum_{j=1}^{3} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} U + QU = 0.$$

В области $(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \in [0, H]$ рассмотрена симметрическая t-гиперболическая по Фридрихсу система дифференциальных уравнений первого порядка со следующим начальным условием и граничными условиями:

$$U|_{t<0} = 0, \qquad G_1 U|_{x3=0} = g_1(x_1, x_2, t), \qquad G_2 U|_{x_3=H} = g_2(x_1, x_2, t).$$

Предполагается, что в данной области функции входящие в $_j(x)$, $j = 0, 1, 2, 3$, представлены в виде постоянной и малой добавки к ней, зависящей от всех трех переменных. Следовательно, матрицы тоже представится в виде суммы

$$A_j = B_j^0 + B_j^1(x), \qquad j = 0, 1, 2, 3,$$

и решение будем искать в виде

$$U(x, t) = U_0(x, t) + U_1(x, t),$$

где $U_0(x, t)$ - решение задачи с постоянными коэффициентами, нулевой правой частью и неоднородными граничными условиями, а $U_1(x, t)$ - решение задачи с постоянными коэффициентами, однородными граничными условиями и правую часть входить решение $U_0(x, t)$.

Прямая линеаризованная задача заключается в нахождении $U(x, t) = U_0(x, t) + U_1(x, t)$, а обратная задача - в нахождении неизвестных коэффициентов входящие в матрицу $B_j^1(x)$.

Основные результаты работы составляют теоремы существования и единственности решения прямой и обратной многомерных линеаризованных задач для системы дифференциальных уравнений электромагнитоупругости, а также получены оценки устойчивости решения многомерной линеаризованной обратной задачи.