Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

О некоторых классах эволюционных обратных задач для параболических уравнений

С.Г. Пятков*, Б.Н. Цыбиков**,

* ЮГУ,
ул. Чехова, 16,
628011 Ханты-Мансийск, Россия
E-mail: pyatkov@uriit.ru

** ЮГУ,
ул. Чехова, 16,
628011 Ханты-Мансийск, Россия
E-mail: tsibikov@ugrasu.ru

Работа первого автора была поддержана РФФИ (грант 06-01-00439)

Мы рассматриваем задачу об определении вместе с решением одного или нескольких коэффициентов в параболическом уравнении вида

$$r(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} - L_0 u = a(x,t,u,\nabla u) \ \ (x,t) \in Q = G \times (0,T), \tag{1}$$

где L_0 – эллиптический оператор. Уравнение (1) дополняется начально-краевыми условиями:

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_S = \varphi(x,t), \quad S = \Gamma \times (0,T), \quad \Gamma = \partial G. \tag{2}$$

Пусть $x' = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$ $(0 \le m \le n-1)$, $S_i = \{(x,t) \in Q : x'' = x_i''\}$, $i = 1,2,\dots,s$, где $\{x_i''\}$ – набор фиксированных различных точек в $\mathbb{R}^{n-m}$. В качестве условий переопределения для нахождения вместе с решением одного или нескольких коэффициентов уравнения (1), которые зависят от переменных x', t, мы рассматриваем условия на семействе плоскостей вида

$$u|_{S_i} = \varphi_i(x',t), \quad i = 1,2,\dots,s, \tag{3}$$

$$u_{x_{k_{ir}}}|_{S_i} = \varphi_{ir}(x',t), \quad m < k_{ir} \le n \ \ \forall r = 1,2,\dots,s_i, \quad s_i \le n-m, \quad i = 1,2,\dots,s. \tag{4}$$

В частности возможно, что $s_i = 0$, это по определению означает, что дополнительные условия (4) на S_i отсутствуют. Такие обратные задачи возникают при описании процесов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов распространения примесей и т.п. (см. [1-5]). Близкие результаты имеются в работах Ю.Е. Аниконова, Ю.Я. Белова, М. Иванчова и ряда других авторов (см., например, [1-10]).

В качестве основных функциональных пространств рассматриваем параболические пространства Гельдера $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$ (см. определения, например, в [11]). Рассмотрим функцию $a(x,t,u,p)$, где $(x,t) \in Q$ и $(u,p) \in U^R = (-R,R)^{n+1}$, $(u \in (-R,R), p \in (-R,R)^n)$. Положим $Q^R = Q \times U^R$. Определим также пространство $C^{\beta,\gamma,\delta}(\overline{Q^R})$, где параметры β,γ,δ отвечают гладкости по переменным $x, t, (u,p)$, соответственно. Имеем для $\beta,\gamma,\delta \in (0,1)$, что

$$< v >_{\beta,\gamma,\delta} = < v >_{\beta,0,0} + < v >_{0,\gamma,0} + < v >_{0,0,\delta}, \quad \|v\|_{C^{\beta,\gamma,\delta}(\overline{Q^R})} = \|v\|_{C(\overline{Q^R})} + < v >_{\beta,\gamma,\delta},$$

где полунормы $< v >_{0,0,\delta}$, $< v >_{\beta,0,0}$, $< v >_{0,\gamma,0}$ определены стандартным образом, в частности,

$$< v >_{0,0,\delta} = \sup_{(u_1,p_1),(u_2\, p_2) \in U_R, (x,t) \in Q} |a(x,t,u_1,p_1) - a(x,t,u_2,p_2)|/(|u_1-u_2|^2 + |p_1-p_2|^2)^{\delta/2}.$$

Положим $s_0 = \sum_{i=1}^s s_i + s$. Считаем, что оператор L_0 и функция $a(x,t,u,p)$ имеют следующую структуру:

$$L_0 u = \sum_{i=k+1}^{s_1'} q_i(x',t) L_i u + L_{s_1'+1} u, \quad L_i u = \sum_{|\alpha| \le 2} a_\alpha^i(x,t) D^\alpha u(x,t),$$

$$a(x,t,u,p)=\sum_{i=1}^{k} q_i(x',t)a_i(x,t,u,p)+a_0(x,t,u,p),$$

где $s_1'=s_0$, если коэффициент $r(x,t)$ в уравнении известен (в этом случае полагаем, что $r(x,t)\equiv 1$) и $s_1'=s_0-1$, если коэффициент r неизвестен (в этом случае предполагаем, что он не зависит от переменной x'', положим $r(x',t)=q_{s_0}(x',t)$).

Сформулируем исследуемую задачу.

Задача I. Найти коэффициенты $q_i(x',t)$ $(i=1,2,\ldots,s_0)$ и решение u уравнения (1), удовлетворяющее начально-краевым условиям (2) и условиям переопределения (3), (4).

Приведем условия на данные задачи. Область G и ее граница могут быть как конечными, так и бесконечными. Далее фиксируем $\alpha\in(0,1)$. Предполагается, что в каждой точке $x_0\in\Gamma$ граница имеет касательную плоскость, и, более того, существует число $d>0$ такое, что в локальной системе координат, полученной путем поворота и переноса начала координат из исходной таким образом, что ось y_n направлена по нормали к Γ в x_0, уравнение Γ имеет вид $y_n=\omega(y')$, где $y'=(y_1,\ldots,y_{n-1})$ и $\omega\in C^{2+\alpha}(\overline{B_d})$ $(B_d=\{y':\ |y'|<d\})$. Причем нормы всех функций ω в $C^{2+\alpha}(\overline{B_d})$ ограничены одной и той же постоянной. В этом случае мы говорим (см. [11]), что

(A) $\Gamma\in C^{2+\alpha}$.

Пусть $\{x_i\}$ – набор точек из (3), (4), $U_{\delta i}=\{x''\in\mathbb{R}^{n-m}:|x''-x_i''|<\delta\}$ $(i=1,\ldots,s)$.

Предполагаем, что

(B) Существует постоянная $\delta_0>0$ и область $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ с границей класса $C^{2+\alpha}$ такие, что

$$G\subset\Omega\times\mathbb{R}^{n-m},\ \ \Omega\times U_{\delta_0 i}\subset G\ \forall i.$$

Легко увидеть, что данных (3), (4) вообще говоря не хватает для определения коэффициентов, в случае если условие (B) нарушено.

Положим $G_{\delta i}=\Omega\times U_{\delta i}$, $Q_\tau=G\times(0,\tau)$, $Q_{\delta i}=G_{\delta i}\times(0,T)$, $Q_{\delta i\tau}=G_{\delta i}\times(0,\tau)$, $Q^R_{\delta i}=Q_{\delta i}\times U^R$, $\Gamma_{\delta i}=\partial\Omega\times U_{\delta i}$, $S_{\delta i}=\Gamma_{\delta i}\times(0,T)$, $\Gamma^0=\partial\Omega$, $S^0=\Gamma^0\times(0,T)$, $Q^0_\tau=\Omega\times(0,\tau)$, $\nabla_{x''}=(\frac{\partial}{\partial x_{m+1}},\frac{\partial}{\partial x_{m+2}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n})$.

(C) Для всех $\delta<\delta_0$

$$a^i_\beta\in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}),\ \nabla_{x''}a^i_\beta\in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_{\delta j}}),\quad (i=k+1,\ldots,s_1'+1,\ j=1,2,\ldots,s,\ 0\le|\beta|\le 2);$$

$$u_0\in C^{2+\alpha}(\overline{G}),\ \nabla_{x''}u_0\in C^{2+\alpha}(\overline{G_{\delta i}}),\quad i=1,\ldots,s;$$

$$\forall R>0\ \ a_i(x,t,u,p)\in C^{\alpha,\alpha/2,\alpha}(\overline{Q^R}),\ \nabla_{x''}a_i\in C^{\alpha,\alpha/2,\alpha}(\overline{Q^R_{\delta j}})\ \ (i=0,\ldots,k,\ j=1,2,\ldots,s)$$

и существуют непрерывные производные a_{iu},a_{ip_r} такие, что

$$\forall R>0\ \ a_{iu},a_{ip_r}\in C^{\alpha,\alpha/2,\alpha}(\overline{Q^R}),\quad i=0,\ldots,k,\ r=1,\ldots,n;$$

$$\varphi\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{S}),\ \nabla_{x''}\varphi\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{S_{\delta i}}),\quad i=1,\ldots,s;$$

(D) для всех $\delta<\delta_0$ и $j=1,2,\ldots,s$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_h\partial x_{r_{jp}}}a^i_\beta\in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_{\delta j}}),\quad (h\ge m+1,\ i=k+1,\ldots,s_1'+1,\ p=1,\ldots,s_j,\ 0\le|\alpha|\le 2);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_h\partial x_{r_{jp}}}u_0\in C^{2+\alpha}(\overline{G_{\delta j}}),\quad p=1,\ldots,s_j,\ h=m+1,\ldots,n;$$

$$\forall R>0\ \ \frac{\partial^2}{\partial x_h\partial x_{r_{jp}}}a_i\in C^{\alpha,\alpha/2,\alpha}(\overline{Q^R_{\delta j}})\ \ (h=m+1,\ldots,n,\ p=1,\ldots,s_j)$$

и существуют непрерывные производные $a_{iuu},a_{ip_hp_r},a_{ip_hu},\ a_{x_hu},a_{x_hp_r}$ такие, что

$$\forall R>0\ \ a_{iuu},a_{ip_rp_h},a_{iup_r},a_{x_lu},a_{x_lp_r}\in C^{\alpha,\alpha/2,\alpha}(\overline{Q^R_{\delta j}}),\ i=0,\ldots,k,\ h,r=1,\ldots,n,\ l=m+1,\ldots,n;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_{r_{jp}}}\varphi \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{S_{\delta j}}), \quad p=1,\dots,s_j,\ h=m+1,\dots,n, \quad i=0,1,\dots,k.$$

Приведем условия корректности рассматриваемых задач. Пусть функции $u, q_i(x',t)$ таковы, что выполнено уравнение (1). Положим в (1) $t=0,\ x''=x''_i$. Используя начальные и краевые условия и условия переопределения (3) получим при $s'_1=s_0-1$, что

$$q_{s_0}(x',0)\varphi_{it}(x',0)-\sum_{p=k+1}^{s_0-1} q_p(x',0)L_p u_0(x',x''_i,0)-L_{s_0}u_0(x',x''_i,0)-$$

$$-\sum_{p=1}^{k} q_p(x',0)a_p(x,0,u_0,\nabla u_0)|_{x''=x''_i}-a_0(x,0,u_0,\nabla u_0)|_{x''=x''_i}=0, \quad i=1,2,\dots,s, \tag{5}$$

и при $s'_1=s_0$, что

$$\varphi_{it}(x',0)-\sum_{p=k+1}^{s_0} q_p(x',0)L_p u_0(x',x''_i,0)-L_{s_0+1}u_0(x',x''_i,0)-$$

$$-\sum_{p=1}^{k} q_p(x',0)a_p(x,0,u_0,\nabla u_0)|_{x''=x''_i}-a_0(x,0,u_0,\nabla u_0)|_{x''=x''_i}=0, \quad i=1,2,\dots,s. \tag{6}$$

Используя также условия переопределения (4), получим при $s'_1=s_0-1$, что

$$q_{s_2}(x',0)\varphi_{ilt}(x',0)-\sum_{p=k+1}^{s_0-1} q_p(x',0)(L_p u_0)_{x_{r_{il}}}|_{x''=x''_i}-(L_{s_0}u_0)_{x_{r_{il}}}|_{x''=x''_i}-$$

$$-\sum_{p=1}^{k} q_p(x',0)(a_p(x,0,u_0,\nabla u_0))_{x_{r_{il}}}|_{x''=x''_i}-(a_0(x,0,u_0,\nabla u_0))_{x_{r_{il}}}|_{x''=x''_i}=0 \tag{7}$$

$(i=1,2,\dots,s, \quad l=1,\dots s_i,\ x'\in\Omega)$ и при $s'_1=s_0$, что

$$\varphi_{ilt}(x',0)-\sum_{p=k+1}^{s_0} q_p(x',0)(L_p u_0)_{x_{r_{il}}}|_{x''=x''_i}-(L_{s_0+1}u_0)_{x_{r_{il}}}|_{x''=x''_i}$$

$$-\sum_{p=1}^{k} q_p(x',0)(a_p(x,0,u_0,\nabla u_0))_{x_{r_{il}}}|_{x''=x''_i}-(a_0(x,0,u_0,\nabla u_0))_{x_{r_{il}}}|_{x''=x''_i}=0 \tag{8}$$

$(i=1,2,\dots,s,\ l=1\dots,s_i,,\ x'\in\Omega)$, где $L_{px_{r_{il}}}$ – оператор L_p, все коэффициенты которого продифференцированы по переменной $x_{r_{il}}$. Очевидно, что разрешимость систем (5), (7) (или соответственно (6), (8)) при $x'\in\Omega$ относительно величин $q_p(x',0)=q_{0p}(x')$, $p=1,\dots,s_2$, есть необходимое условие разрешимости исходной обратной задачи. Системы (5), (7) (или соответственно (6), (8)) можно также записать в виде

$$A(x')\vec{q}=\vec{g}, \quad \vec{q}=(q_{01},q_{02},\dots,q_{s_2}), \tag{9}$$

где A – соответствующая матрица. Решение системы (9) должно существовать. Естественно потребовать, что

$$\textbf{(E)} \quad \exists m_0, M_0>0:\ m_0\le|\det A(x')|\le M_0,\ \forall x'\in\Omega;$$

$$\text{если } s'_1=s_0-1, \text{ то } \exists m_1,M_1>0:\ m_1\le q_{0s_2}(x')\le M_1,\ \forall x'\in\Omega;$$

$$\exists m_2, M_2 > 0: \; m_2|\xi|^2 \le \sum_{p=k+1}^{s_1'+1} q_{0p} \sum_{|\beta|=2} a_\beta^p \xi^\alpha \le M_2|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \; \forall x \in Q.$$

где функции $q_{0p}(x')$ – решение системы (9).

Нам осталось записать условия согласования. Пусть

$$B_0 u = \sum_{i=k+1}^{s_1'} q_{0i}(x') L_i u + L_{s_1'+1} u, \quad a^0(x,t,u,p) = \sum_{i=1}^{k} q_{0i}(x') a_i(x,t,u,p) + a_0(x,t,u,p).$$

Условие (E) гарантирует эллиптичность оператора B_0.

$$(\mathbf{F}) \;\; \varphi(x,0) = u_0|_\Gamma, \quad \varphi_i(x',t)|_{S^0} = \varphi(x',x_i'',t)|_{S^0}, \quad \varphi_i(x',0) = u_0(x',x_i''), \quad i = 1,2,\ldots,s;$$

$$\varphi_{il}(x',t)|_{S^0} = \frac{\partial}{\partial x_{r_{il}}} \varphi(x',x_i'',t)|_{S^0}, \quad \varphi_{il}(x',0) = u_{0x_{r_{il}}}(x',x_i''), \quad (i = 1,2,\ldots,s, \; l = 1,\ldots,s_i),$$

$$\varphi_t(x,0) = B_0 u_0|_\Gamma + a^0(x,t,u_0,\nabla u_0)|_\Gamma;$$

$$\varphi_{tx_l}(x,0)|_{\Gamma_{\delta_0 i}} = \frac{\partial}{\partial x_l}(B_0 u_0 + a^0(x,t,u_0,\nabla u_0))|_{\Gamma_{\delta_0 i}}, \quad l = m+1,\ldots,n, \; i = 1,\ldots,s;$$

(G) для всех $j = 1\ldots,s$

$$\varphi_{tx_l x_{r_{jp}}}(x,0)|_{\Gamma_{\delta_0 j}} = \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_{r_{jp}}}(B_0 u_0 + a^0(x,t,u_0,\nabla u_0))|_{\Gamma_{\delta_0 j}}, \quad l = m+1,\ldots,n, \; p = 1,\ldots,s_j.$$

Приведем основной результат.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (A)-(G). *Тогда для некоторого числа* $0 < t^* \le T$ *на промежутке* $[0,t^*]$ *существует единственное решение* $u(x,t)$, $q_1(x',t),\ldots,q_{s_0}(x',t)$ *задачи I такое, что*

$$u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{t^*}}), \quad \nabla_{x''} u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 i t^*}}), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_{r_{ip}}} \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 i t^*}}),$$

$$\forall \delta_1 < \delta_0, \quad i = 1,2,\ldots,s, \; p = 1,\ldots,s_i, \quad l = m+1\ldots,n,$$

$$q_i \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q^0_{t^*}}), \quad i = 1,2,\ldots,s_0.$$

Литература.

1. Kozhanov A.I. Composite type equations and inverse problems. Utrecht. VSP. 1999.

2. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin. 1998.

3. Ivanchov M. Inverse problems for equation of parabolic type. Math. Studies. Monograph Series. V. 10. Lviv: WNTL Publishers, 2003.

4. Belov Ya.Ya. Inverse problems for parabolic equations. Utrecht: VSP, 2002.

5. Prilepko A.I. , Orlovsky D. G., and Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics. New-York: Marcel Dekker, Inc. 1999.

6. Anikonov Yu. E. and Belov Yu.Ya. Determining of two unknown coefficients of parabolic type equation // J. Inv. Ill-Posed Problems. v.9, no. 5. 2001. p.469-488.

7. Belov Yu.Ya. and Shipina T.N. The problem of determining a coefficient in the parabolic equation and some properties of its solution // J. Inv. Ill-Posed Problems. v.9, no. 1. 2001. p.31-48.

8. Баранов С.Н., Белов Ю.Я. О проблеме идентефикации коэффициентов с неоднородными условиями переопределения. Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Институт математики СО РАН. 2002. с. 11-22.

9. Полынцева С.В. О задачах идентификации трех коэффициентов многомерного параболического уравнения. Материалы конференции "Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования". Ханты-Мансийск: ГП "Полиграфист". 2005. с. 52-57.

10. Yamamoto M. Conditional stability in determination of densities of heat sources in a bounded domain. In "Estimation and Control of Distributed Parameter Systems". Eds: Desch W., Kappel P., and Kunisch K. Birkhäuser Verlag, Basel. 1994. p.359-370.

11. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука. 1967.