Об одной краевой задаче для операторно-дифференцируемых уравнений с разрывным коэффициентом

Рустамова Ламия Аладдин кызы*

* НИИ Приклодной Математики БГУ ,

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим операторно-дифференциальное уравнение

$$Pu = -\frac{d^2u}{dt^2} + \rho(t)A^2u + A_0\frac{d^2u}{dt^2} + A_1\frac{du}{dt} + A_2u = f(t), \quad t \in R_+, \tag{1}$$

с краевым условием

$$u'(0) = 0 \ , \tag{2}$$

где $f(t) \in L_2(R_+;H)$, $u(t) \in W_2^2(R_+;H;1)$, числовая функция $\rho(t) = \alpha^2$ при $t \in (0,1)$ и $\rho(t) = \beta^2$ при $t \in (1,\infty)$, причем $\alpha > 0,\ \beta > 0$, а операторные коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

1) A - нормальный обратимый оператор, спектр которого содержится в угловом секторе,

$$S_\varepsilon = \{\lambda : |\arg\lambda| \le \varepsilon\} \ , \ 0 \le \varepsilon < \pi/2 .$$

2) Операторы $B_j = A_jA^{-j} \quad (j = 0,1,2,)$ ограничены в H .

Здесь

$$L_2(R_+;H) = \left\{ f(t) : \|f\|_{L_2} = \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

а

$$W_2^2(R_+;H;1) = \{u : u'', A^2u \in L_2(R_+;H) \ , u(0) = 0\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^2} = \left(\|u''\|_{L_2}^2 + \|A^2u\|_{L_2}^2 \right)^{1/2}.$$

В данной работе получены условия разрешимости (1), (2). Эти условия выражается коэффициентами уравнения (1). А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть оператор A удовлетворяет условию 1), а операторы $B_j = A_jA^{-j} \quad (j = 0,1,2)$ удовлетворяет условию 2), причем

$$K(\varepsilon;\alpha;\beta) = \sum_{j=0}^{2} c_j(\varepsilon;\alpha;\beta)\|B_{2-j}\| < 1,$$

где числа $c_j(\varepsilon)$ определяются следующим образом

$$c_0(\varepsilon;\alpha;\beta) = \frac{1}{\min(\alpha^2;\beta^2)} \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le \varepsilon < \pi/4 \ , \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}, & \pi/4 \le \varepsilon < \pi/2, \end{cases}$$

$$c_1(\varepsilon;\alpha;\beta) = \frac{1}{2\cos\varepsilon \ \min(\alpha;\beta)}, \quad 0 \le \varepsilon < \pi/2,$$

$$c_2(\varepsilon;\alpha;\beta) = \frac{\max(\alpha;\beta)}{\min(\alpha;\beta)} \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le \varepsilon \le \pi/4 \ , \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}, & \pi/4 \le \varepsilon < \pi/2. \end{cases}$$

Тогда краевая задача (1),(2) при любом $f(t) \in L_2(R_+;H)$ имеет решение $u \in W_2^2(R_+;H;1)$.