Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

О существовании и структуре решений систем нелинейных интегро-функциональных уравнений Вольтерры первого рода

Н.А. Сидоров*, **Д.Н. Сидоров****, **А.В. Труфанов*****

* ИМЭИ ИГУ,
бул. Гагарина, 20,
664003 Иркутск, Россия
sidorov@math.isu.runnet.ru

** ИСЭМ СО РАН
ул. Лермонтова, 130,
664033 Иркутск, Россия
dsidorov@isem.sei.irk.ru

*** ИМЭИ ИГУ,
бул. Гагарина, 20,
664003 Иркутск, Россия
E-mail: atrufanov@mail.ru

Работа частично поддержана РФФИ (грант 05-01-00336) и Иркутским Государственным Университетом (проект 2007-01-03)

Рассматривается система

$$\int_0^t \sum_{j=1}^m K_{i\,j}(t,s)\Big(x_j(s) + \sum_{s=1}^m a_{j\,s} x_j(\alpha s) + g_j(s^l x(s), s)\Big)\,ds = f_i(t),\ i = 1,..,m, \tag{1}$$

где матрица K и вектор-функции $g,\ f$ – аналитические в окрестности нуля, причем

$$K(t,s) = \sum_{i=0}^n K^n_{n-i} t^{n-i} s^i + O((|t|+|s|)^{n+1}),\ \mathbf{det} K^n_{n-i} \neq 0, \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

$$g_j(s^l x(s), s) = g_j(s^{l_{ij}} x_1(s), ..., s^{l_{mj}} x_m(s), s),\ \min_{ij} l_{i\,j} = l.$$

Рассматривается случай, когда $l > n$. Строятся обобщенные решения с точечным носителем в сингулярной части вида

$$x(t) = c_0\delta(t) + c_1\delta^{(1)}(t) + \ldots + c_n\delta^{(n)}(t) + u(t), \tag{2}$$

где $\delta(t)$ – функция Дирака,$c_0, ..., c_n$ – постоянные векторы из R^m, $u(t)$ – регулярная вектор-функция. Доказаны теоремы существования непрерывных и обобщенных решений (2) систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерры первого рода (1). В первых двух теоремах продполагается, что в уравнении (1) нет возмущения аргумента, то есть матрица $A = ||a_{j\,s}|| \equiv 0$. В теоремах 1, 2, 3 $u(t)$ - аналитическая в окрестности точки $t = 0$, в теореме 4 функция $u(t)$ строится в виде логарифмо-степенного ряда.

Совокупность всех бесконечно дифференцируемых финитных функций с носителями в окрестности $(-\rho,\rho)$ обозначим через $D_{(-\rho,\rho)}$. Множество линейных непрерывных функционалов, определенных на $D_{(-\rho,\rho)}$, обозначим через $D'_{(-\rho,\rho)}$, а подмножество его элементов вида (2) с сингулярностью n-го порядка с носителем в нуле – через $D'_{n(-\rho,\rho)}$. Таким образом, искомое решение (2) уравнения (1) строится в классе $D'_{n(-\rho,\rho)}$ и удовлетворяет уравнению (1) в смысле теории распределений Соболева–Шварца. Сразу отметим, что при $n < l\ \forall x \in D'_{n(-\rho,\rho)}$ произведение $t^l x = t^l u(t)$ является регулярной функцией, что решает для уравнения (1) при $l > n$ проблему нелинейных операций с такими обобщенными функциями.

Так как в пространстве D' при $i,j = 0,1,\ldots,n,\ k \geq n$ справедливы тождества

$$t^{k-i}\Theta * s^i\delta^{(j)}(s) = (-1)^j j! t^{k-j}\delta_{ij},$$

где Θ – функция Хевисайда, δ_{ij} – символ Кронекера, то имеет место равенство

$$\int\limits_0^t \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} K_{k-i}^k t^{k-i} s^i (c_0\delta(s) + \ldots + c_n \delta^{(n)}(s))\, ds = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j j! \sum_{k=n}^{\infty} K_{k-j}^k t^{k-j} c_j.$$

Заметим, что

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{\partial^j K(t,s)}{\partial s^j}\bigg|_{s=0} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j j! \sum_{k=n}^{\infty} K_{k-j}^k t^{k-j}.$$

Поэтому элемент $x \in D'_{n(-\rho,\rho)}$ может быть решением уравнения (1) только тогда, когда регулярная составляющая из представления (2) удовлетворяет уравнению

$$\int\limits_0^t K(t,s)(u(s) + g(s^l u(s), s))\, ds = r(t, c_0, \ldots, c_n),$$

где

$$r(t, c_0, \ldots, c_n) = f(t) - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \, \frac{\partial^j K(t,0)}{\partial s^j}\, c_j.$$

Определим постоянные векторы $c_0, \ldots, c_n$ из системы линейных алгебраических уравнений

$$r_t^{(i)}(0, c_0, \ldots, c_n) = 0, \quad i = 0, \ldots, n \tag{3}$$

с нижней блочно-треугольной матрицей с невырожденными матрицами на диагонали. Поэтому постоянные векторы $c_n, \ldots, c_0$ определяются последовательно и единственным образом.

Теорема 1. *Пусть $l > n$,*

$$\mathbf{det}\left(\sum_{i=0}^{n} K_{n-i}^n \frac{1}{i+j}\right) \neq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad \mathbf{det} K_{n-i}^n \neq 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\mathbf{det}\left(\sum_{i=0}^{n} K_{n-i}^n\right) \neq 0.$$

Тогда система (1) в классе $D'_n(-\tilde\rho, \tilde\rho)$ имеет единственное решение (2), где постоянные $c_0, \ldots, c_n$ определяются единственнм образом из системы линейных алгебраических уравнений, непрерывная вектор-функция $u(t)$ строится методом последовательных приближений.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы 1 $\sum_{i=0}^{n} K_{n-i}^n = 0$ и при этом*

$$\frac{\partial^i K(t,s)}{\partial t^i}\bigg|_{s=t} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, r-1, \quad \frac{\partial^r K(t,s)}{\partial t^r}\bigg|_{s=t} = O(t^{n-r}), \quad r \leq n.$$

Тогда утверждения теоремы 1 остаются справедливыми.

Лемма 1. Пусть коэффициенты ядра $K_{ij}(t,s)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, функции $f_i(t)$ являются аналитическими в некоторой окрестности нуля, тогда вектор-функция

$$\omega(t) = c_0\delta(t) + c_1\delta^{(1)}(t) + \ \ldots\ + c_n\delta^{(n)}(t) + p(t)$$

удовлетворяет системе первых m уравнений системы

$$\begin{cases} \int\limits_0^t \sum\limits_{j=1}^m K_{ij}(t,s)\omega_j(s)ds = f_i(t), \quad i=\overline{1,m} \\ x_j(t) + \sum\limits_{s=1}^m a_{js}x_s(\alpha t) + g_j(t^l x(t),t) = \omega_j(t), \quad j=\overline{1,m}. \end{cases}$$

где векторы констант $c_0, \ \dots \ , c_n$ определяются из системы (3), вектор-функция $p(t)$ - единственное регулярное решение уравнения

$$\int\limits_0^t K(t,s)p(s)ds = r(t,c_0,\dots,c_n).$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы 1, матрица* $A \neq 0, \quad 0 < |\alpha| < 1$ *и*

$$\mathbf{det}\left(E_m + \frac{1}{\alpha^i|\alpha|}A\right) \neq 0, \ i=0,1,...,n, \tag{4}$$

$$\mathbf{det}\left(E_m + \alpha^j A\right) \neq 0, \ j=0,1,2,.... \tag{5}$$

Тогда уравнение (1) имеет обобщенное решение

$$x(t) = \left(E_m + \frac{1}{\alpha^0|\alpha|}A\right)^{-1} c_0\delta(t) + \ \dots \ + \left(E_m + \frac{1}{\alpha^n|\alpha|}A\right)^{-1} c_n\delta^{(n)}(t) + u(t), \tag{6}$$

где векторы констант $c_0, \ \dots \ , c_n$ *определяются из системы (3), регулярная вектор-функция* $u(t)$ *является аналитической в окрестности нуля.*

Рассмотрим случай, когда условие (5) не выполняется при $j=k$. Введем обозначение $C(i) \stackrel{\triangle}{=} (E_m + \alpha^i A)$. Пусть

$$\begin{aligned} &\mathbf{det}(C(k)) = 0, \\ &\mathbf{det}(C(j)) \neq 0, \ j=0,1,...,k-1,k+1,... \end{aligned} \tag{7}$$

размерность ядра $\mathbf{dim}N(C(k)) = d$ и матрица $C(k)$ имеет полный $(-A)$-жорданов набор $\{\varphi_i^{(j)}\}, i=\overline{1,d}, j=\overline{1,p_i}$, т.е выполняются равенства

$$C(k)\varphi_i^{(1)} = 0, \ i=\overline{1,d}; C(k)\varphi_i^{(j)} = (-A)\varphi_i^{(j-1)}, \ i=\overline{1,d}, j=\overline{2,p_i},$$

$$\mathbf{det}|| < (-A)\varphi_i^{(p_i)}, \psi_k > || \neq 0, i,k=\overline{1,d} \tag{8}$$

где векторы $\psi_j \ j=\overline{1,d}$ - элементы базиса пространства нулей матрицы $C(k)^T$, числа $p_i, \ i=\overline{1,d}$ суть длины цепочек $(-A)$-присоединенных элементов.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия леммы 1, матрица* $A \neq 0, \ 0 < |\alpha| < 1$, *выполнены условия (4), а также (7) и (8). Тогда система (1) имеет решение вида (6), где точка* $t=0$ *является логарифмической особой точкой регулярной составляющей u(t),*

$$u(t) = u^N(t) + t^N v(t), v(0) = 0,$$

причем

$$u^N(t)=\sum_{i=0}^{k-1}u_it^i+t^k(u_{kp}\ln^p|t|+...+u_{k1}\ln|t|+u_{k0})+\sum_{i=k+1}^{N}t^i\sum_{j=0}^{z_i}u_{ij}\ln^j|t|,$$

где $p=\max p_i$, z_i *- определенные натуральные числа. При этом* d *координат векторного коэффициента* u_{k0} *останутся свободными параметрами в соответствующем решении системы (1), функция* $v(t)$ *строится методом последовательных приближений.*

Доказательства теорем 1, 2, 3 и 4 используют принцип сжатых отображений в сочетании с методом неопределенных коэффициентов для построения начальных приближений. Детали приведены в работе [1].

Замечания.

1. Если A - самосопряженная матрица, то $p_1=\ldots p_d=1$.

2. Всегда найдутся базисы $\{\phi_i\},\{\psi_i\}$, для которых будут выполнены условие (8).

3. Если в Теореме 4 $C(k_i)=0$, $i=1,...,s.$, $s\geq 2$, то регулярную составляющую $u(t)$ решения 6 тоже можно построить в виде логарифма степенного ряда, но процесс построения существенно усложняется.

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\int_0^t(t^2+ts-2s^2)(x_1(s)+s^5x_2^2(s))\,ds=1+t.$$

$$\int_0^t(t^2+ts-2s^2)(x_2(s)+s^6x_1(s)x_2(s))\,ds=2+t^2+\frac{5}{6}t^3.$$

$$\int_0^t(t^2+ts-2s^2)(x_3(s)+s^5x_3(s)x_2(s))\,ds=3+t+t^2+t^3.$$

Здесь выполнены условия теоремы 2 при $n=2$, $l=5/2$, $p=1$. В классе D' существует решение

$$x_1(t)=\delta(t)-\delta^{(1)}(t)-\frac{1}{14}t^5+O(t^6),$$

$$x_2(t)=2\delta(t)-\frac{1}{4}\delta^{(2)}(t)+1+O(t),$$

$$x_3(t)=3\delta(t)-\delta^{(1)}(t)-\frac{1}{4}\delta^{(2)}(t)+\frac{6}{5}+O(t).$$

Список литературы

[1] *Сидоров Н. А., Сидоров Д. Н.* Существование и построение обобщенных решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерры первого рода. //Дифференц. уравнения. 2006. — Т.42.№.9., — С.1243–1247.

[2] *Сидоров Н. А., Труфанов А. В.* Структура решений операторных уравнений с функциональными возмущениями.// Труды Средневолжского Математического общества. —2006. Т. 8. № 1., —С. 104–109.

[3] *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М: Наука, 1969.

[4] *Магницкий Н. А.*Асимптотики решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода.—// Докл. АН СССР. 1983.— Т. 269. № 1.— С. 29–32.