Международная конференция "Обратные и некорректные задачи математической физики", посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

О стабилизации решения задачи идентификации функции источника для уравнения параболического типа

Р.В. Сорокин*

* ИЕиГН СФУ,
пр. Свободный, 79
660041 Красноярск, Россия
E-mail: rsor@mail.ru

В многомерной полосе $G_{[0,+\infty)} = \{(t,x,z)|\ t \geqslant 0,\ x \in E_n,\ z \in E_1\}$ рассматривается задача Коши

$$u_t = L_x(u) + a(t)u_{zz} + b(t)u_z + c(t)u + g(t,x)f(t,x,z), \tag{1}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \qquad x \in E_n,\ z \in E_1. \tag{2}$$

Здесь

$$L_x(u) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(t)u_{x_jx_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j(t)u_{x_j},$$

$$\mu|\xi|^2 \leqslant \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(t)\xi_j\xi_k \qquad \forall \xi \in E_n,\ t \in [0,T],\ \mu = \text{const} > 0.$$

Коэффициенты $a_{jk}(t)$, $a_j(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $f(t,x,z)$ — непрерывные, действительнозначные функции своих аргументов, заданные при $t \geqslant 0$ и в $G_{[0,+\infty)}$ соответственно. Коэффициент $g(t,x)$ является неизвестным и подлежит определению одновременно с функцией $u(t,x,z)$.

Пусть выполняется условие переопределения

$$u(t,x,0) = \beta(t,x),\ x \in E_n,\ t \in [0,T], \tag{3}$$

где $\beta(t)$– заданная действительнозначная функция, удовлетворяющая условию согласования

$$u_0(x,0) = \beta(0,x),\ x \in E_n.$$

Теоремы существования и единственности задачи (1)–(3) доказаны в [1]. В [2] проведено исследование поведения решения при $t \to +\infty$ для обратной задачи вида (1)–(3) в случае одномерного параболического уравнения.

В предположении, что функция $u(t,x,z)$ допускает преобразование Фурье по переменной z, приходим к задаче Коши для линейного интегродифференциального уравнения в $\widetilde{G}_{[0,+\infty)} = \{(t,x,y)|\ 0 \leq t \leq T,\ x \in E_n,\ y \in E_1\}$

$$\begin{aligned} v_t = L_x(v) - ay^2v + iybv + cv + \\ + \operatorname{Re}\left(\gamma + a\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 v\,dy - ib\int_{-\infty}^{+\infty} yv\,dy\right) f^{-1}(t,x,0)F(t,x,y), \end{aligned} \tag{4}$$

$$v(0,x,y) = v_0(x,y). \tag{5}$$

Здесь $\gamma(t,x) = \beta_t(t,x) - c(t)\beta(t,x) - L_x(\beta(t,x))$.

Предположим, что входные данные в $G_{[0,+\infty)}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned}
&|a_{jk}(t)| + |a_j(t)| + |a(t)| + |b(t)| + |c(t)| \leqslant C, \quad j,k = 1,2,\\
&\left|D_x^\alpha \beta^k(t,x)\right| + \left|\tfrac{\partial}{\partial t} D_x^\alpha \beta^k(t,x)\right| \leqslant C,\\
&f(t,x,0) \geqslant \delta > 0, \qquad c(t) \leq 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Пусть для функций $F(t,x,y)$ и $v_0(x,y)$ в $\widetilde{G}_{[0,+\infty)}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&|y^{k+\varepsilon} D_x^\alpha F| + |y^{k+\varepsilon} D_x^\alpha v_0| \leq C,\\
&\quad |\alpha| \leq 3,\ k = 0,1,\dots 3,\\
&|y^{k+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} D_x^\alpha F| + |y^{k+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} D_x^\alpha v_0| \leq C,\\
&\quad |\alpha| \leq 2,\ k = 0,1,\dots 3, \qquad C, \varepsilon = const > 0,\ \varepsilon < 1.
\end{aligned} \tag{7}$$

Основные результаты исследования поведения решения задачи (1)–(3) при $t \to +\infty$ можно сформулировать в следующем виде:

Теорема 1. *Пусть в* $\widetilde{G}_{[0,+\infty)}$ *выполняются неравенства* (6), (7) *и имеет место соотношение*

$$- c(t) - \frac{2}{\delta}\big(|a(t)| + |b(t)|\big) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 + |y| + y^2)|F(t,x,y)|\, dy \geqslant d, \qquad d = const > 0. \tag{8}$$

Тогда, если

$$\int\limits_0^{+\infty} |\gamma(t,x)|\, dt \leqslant C,$$

то для решения задачи (1)–(3) *в* $G_{[0,+\infty)}$ *справедливо неравенство*

$$|u(t,x,z)| + |u_z(t,x,z)| + |u_{zz}(t,x,z)| + |g(t,x)| \leqslant C.$$

Теорема 2. *Пусть в* $\widetilde{G}_{[0,+\infty)}$ *выполняются условия* (6), (7), (8) *и справедливо неравенство*

$$\sup_{x \in E_n} |\gamma(t)| \leqslant \frac{1}{1+t^p}, \quad p = \text{const} > 1.$$

Тогда для решения задачи (1)–(3) имеет место соотношение

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\sum_{j=0}^{2} \sup_{(x,z) \in E_{n+1}} \left| \frac{\partial^j}{\partial z^j} u(t,x,z) \right| + \sup_{x \in E_n} |g(t,x)| \right) = 0.$$

Список литературы

[1] Belov Yu.Ya. *Inverse Problems for Partial Differential Equations.* - Utrecht: VSP, 2002. 211p.

[2] Шипина Т.Н. Некоторые обратные задачи с данными Коши: Дисс. : канд. ф.-м. наук / Шипина Т.Н. - Красноярск, 1999. - 90 с.