

Фундаментальные решения опережающего типа в обратных задачах для волнового уравнения

Г.М. Цибульчик

ИВМиМГ СО РАН

пр. Ак. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: tsib@omzg.sccc.ru

Работа была поддержана РФФИ (грант 06-05-64265)

Продолжение волновых полей представляет собой эффективный алгоритм решения обратных задач рассеяния волн и реконструкции источников волнового поля. Наиболее адекватный инструмент для анализа и рассмотрения таких вопросов доставляет тождество Грина, хорошо известное в теоретической физике. Единственная особенность, отличающая применение этого аппарата к проблеме продолжения волновых полей от обычной схемы его использования в задачах математической физики, состоит во введении в оборот функции Грина (а, точнее, фундаментального решения) *опережающего (анти-каузального)* типа [1,2]:

$$\left. \begin{aligned} \square G_+(\mathbf{x}, \xi, t - \tau) &= \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(t - \tau) & \text{для} & \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}^1; \xi \in D_0, \tau > 0 \\ G_+(\mathbf{x}, \xi, t - \tau) &\equiv 0 & \text{для} & \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t > \tau \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

Здесь через $\square \equiv \Delta - c_0^{-2} \partial_{tt}$ обозначен волновой оператор, действующий по точке поля (\mathbf{x}, t) , а (ξ, τ) играют роль параметров; D_0 - конечная область, ограниченная криволинейной поверхностью S_0 , в \mathbb{R}^3 , которая представляет интерес для исследования.

Если во втором условии из (1) переменить знак неравенства на противоположный, то определим хорошо известную (*каузальную*) функцию Грина *запаздывающего* типа:

$$G_-(\mathbf{x}, \xi, t - \tau) \equiv 0 \quad \text{для} \quad t < \tau. \quad (2)$$

Следует подчеркнуть, что коэффициент в уравнении (1), скорость волн, представляет в общем случае переменную (но известную, заданную) величину, т.е. $c_0 \equiv c_0(\mathbf{x})$ есть скорость в так называемой референц-модели. Таким образом, далее, если специально не оговорено, под G понимается фундаментальное решение волнового уравнения в неоднородной среде.

В случае $c_0 \equiv \text{const}$ геометрический смысл этих функций Грина иллюстрирует рис.1,

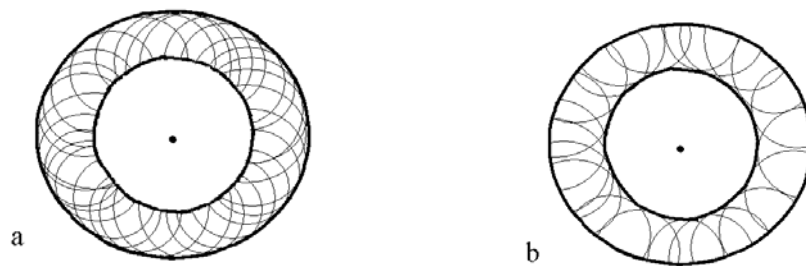


Рис.1

в котором рис.1a соответствует функции G_- , а рис.1b - функции G_+ . На рис.1a внутренняя сфера появляется по времени раньше и служит источником вторичных волн Гюйгенса, огибающая которых приводит к появлению внешней сферы: таким образом волновой процесс распространяется от источника (в центре сферы) на бесконечность. На рис.1b внешняя сфера появляется по времени раньше и служит источником вторичных волн Гюйгенса, огибающая которых приводит к появлению внутренней сферы в более поздний момент времени: таким образом волновой процесс распространяется из бесконечности к центру сферы, в котором располагается сток энергии. После включения такого "источника" для $t > \tau$ в среде воцаряется покой (*источник, работающий в обратном времени, есть сток энергии, работающий в прямом, естественном, направлении времени*[4]).

С вычислительной же точки зрения выгоднее всего иметь дело (из-за отсутствия скачков поля при его продолжении через поверхность наблюдения) с линейной комбинацией из (1) и (2):

$$G_*(\mathbf{x}, \xi, t - \tau) = G_-(\mathbf{x}, \xi, t - \tau) - G_+(\mathbf{x}, \xi, t - \tau). \quad (3)$$

Фундаментальное решение G_* , сохраняющее свойства как *опережающего*, так и *запаздывающего* типов, определяется как решение следующей задачи Коши во всем 4-х мерном пространстве \mathbb{R}^{3+1} [2,3]:

$$\left. \begin{aligned} \square G_*(\mathbf{x}, \xi, t - \tau) &= 0 & \text{для } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}^1; \xi \in D_0, \tau > 0 \\ G_*(\mathbf{x}, \xi, 0) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} G_*(\mathbf{x}, \xi, 0) &= -c_0^2 \delta(\mathbf{x} - \xi) \end{aligned} \right\} \quad \text{для } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t = \tau \quad (4)$$

Основной моделью служит следующая постановка задачи на излучение и распространение волн в \mathbb{R}^{3+1} :

$$\left. \begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\mathbf{x}, t) &= f(\mathbf{x}, t) & \text{для } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, t) &\equiv 0 & \text{для } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t < 0 \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

в которой скорость $c_0 \equiv c_0(\mathbf{x})$ как уже указывалось выше, считается заданной функцией (однородность среды в общем случае не предполагается).

Обратная задача состоит в том, чтобы определить функцию источников $f(\mathbf{x}, t)$ по полю $u_0(\mathbf{x}, t)$ и его нормальной производной $\mu(\mathbf{x}, t) \equiv \partial_n u(\mathbf{x}, t)$, известных на замкнутой поверхности S_0 , содержащей в себе компактную область источников $\bar{D} \in D_0$ (рис.2).

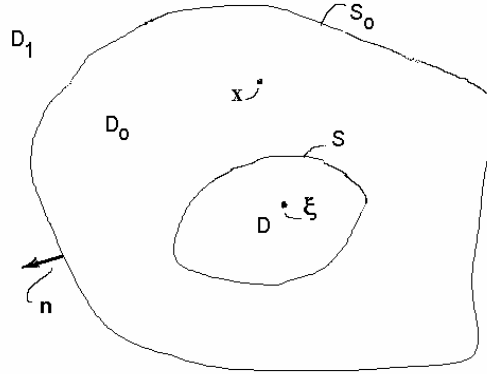


Рис.2

Следует подчеркнуть, что объединение $D_0 \cup S_0 \cup D_1$ образует \mathbb{R}^3 и задача (5) поставлена для всего пространства \mathbb{R}^3 , а поверхность наблюдения S_0 на рис.2 является фиктивной поверхностью, на которой лишь “регистрируются” след поля u_0 и его нормальная производная μ и никакие граничные условия не ставятся.

Тождество Грина, примененное к паре функций: u из (5) и G из (1,2,4), позволяет установить функциональные связи, существующие между истинным и продолженными полями в неоднородной среде:

$$w_-(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 0 & \text{для } \mathbf{x} \in D_0, t \in \mathbb{R}^1 \\ -u(\mathbf{x}, t) & \text{для } \mathbf{x} \in D_1, t \in \mathbb{R}^1 \end{cases}; \quad (6)$$

$$w_+(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} u(\mathbf{x}, t) - u_+(\mathbf{x}, t) & \text{для } \mathbf{x} \in D_0, t \in \mathbb{R}^1 \\ \frac{1}{2} u_0(\mathbf{x}, t) - u_+(\mathbf{x}, t) & \text{для } \mathbf{x} \in S_0, t \in \mathbb{R}^1 \\ -u_+(\mathbf{x}, t) & \text{для } \mathbf{x} \in D_1, t \in \mathbb{R}^1 \end{cases} \quad (7)$$

$$w_*(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) - u_+(\mathbf{x}, t) \quad \text{для } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}^1 \quad (8)$$

В выражениях (6-8) поле $u(\mathbf{x}, t)$ есть истинное поле, существующее в среде. Оно определяется как решение задачи (5) в виде объемного потенциала, распределенного по области источников D (рис.2):

$$u(\mathbf{x}, t) = \iiint_D dV_\xi f(\xi, t) * G_-(\mathbf{x}, \xi, t), \quad (9)$$

где символ $*$ означает операцию свертки по времени t .

Поле $u_+(\mathbf{x}, t)$ описывает вклад от объемных “источников” $f(\mathbf{x}, t)$, излучающих в обращенном времени, или стоков энергии:

$$u_+(\mathbf{x}, t) = \iiint_D dV_\xi f(\xi, t) * G_+(\mathbf{x}, \xi, t), \quad (10)$$

где символ $*$ также означает операцию свертки по времени t .

Дополняя нулем функцию $f(\mathbf{x}, t)$ на все пространство \mathbb{R}^{3+1} и с учетом (3),(9),(10), функциональное соотношение (8) допускает представление в виде интегрального уравнения I-го рода: для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}^1$

$$w_*(\mathbf{x}, t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} dV_\xi f(\xi, t) * G_*(\mathbf{x}, \xi, t). \quad (11)$$

где символ $*$ означает операцию свертки по времени t . Отметим, что в однородной среде $c_0 \equiv \text{const}$ уравнение (11) принимает вид 4-х мерной свертки в пространстве \mathbb{R}^{3+1} : $w_*(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) * G_*(\mathbf{x}, t)$.

Поле $w(\mathbf{x}, t)$ с соответствующим нижним индексом, фигурирующее в левой части равенств (6-8,11), считается известным в \mathbb{R}^{3+1} (так как известны u_0 и μ) и представляет продолженное поле, формируемое с помощью поверхностного интеграла в формуле Грина:

$$w(\mathbf{x}, t) = \iint_{S_0} dS_\xi \left\{ u_0(\xi, t) * \frac{\partial}{\partial n_\xi} G(\mathbf{x}, \xi, t) - \mu(\xi, t) * G(\mathbf{x}, \xi, t) \right\}, \quad (12)$$

где символ $*$, как и в (9-11), означает операцию свертки по времени t .

Приведенные выше функции существенно различаются по свойствам гладкости. Так, $w_-(\mathbf{x}, t), w_+(\mathbf{x}, t)$ представляют собой потенциалы двойного и простого слоев, распространенных по поверхности наблюдения S_0 . Из свойств этих потенциалов, хорошо изученных в классической теории уравнения Лапласа и в настоящее время обобщенных на случай волнового уравнения [5,6], следует, что они являются гладкими, бесконечно-дифференцируемыми функциями всюду вне поверхности S_0 , на которой они испытывают разрыв при переходе через нее. Скачки поля и его нормальной производной, определяемые из (6,7):

$$[w_-](\mathbf{x}, t) = [w_+](\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t)$$

$$[\partial_n w_-](\mathbf{x}, t) = [\partial_n w_+] = \mu(\mathbf{x}, t),$$

служат для волнового уравнения правой частью типа “диполя” и “монополя”, распределенных по поверхности наблюдения S_0 [7]. Поля эти удовлетворяют условиям:

$$\left. \begin{aligned} \square w_-(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\partial}{\partial n} (u_0 \delta(S_0)) - \mu \delta(S_0) \quad \text{для } (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{3+1} \\ w_-(\mathbf{x}, t) &\equiv 0 \quad \text{для } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t < 0 \\ w_-(\mathbf{x}, t) &= 0 \quad \text{для } \mathbf{x} \in D_0, t \in \mathbb{R}^1 \end{aligned} \right\},$$

$$\square w_+(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial n} (u_0 \delta(S_0)) - \mu \delta(S_0) \quad \text{для } (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{3+1},$$

где через $\delta(S_0)$ обозначена поверхностная дельта-функция [7].

Продолженное поле $w_*(\mathbf{x}, t)$, являющееся разностью (7) и (6):

$$w_*(\mathbf{x}, t) = w_+(\mathbf{x}, t) - w_-(\mathbf{x}, t), \quad (12)$$

уже не содержит разрывов (скачки поля взаимно уничтожаются), оказывается всюду в \mathbb{R}^{3+1} гладкой функцией, удовлетворяющей однородному волновому уравнению:

$$\square w_*(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{для } (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{3+1}. \quad (13)$$

Именно это обстоятельство делает привлекательным использование $w_*(\mathbf{x}, t)$ вместо $w_+(\mathbf{x}, t)$ для продолжения поля, хотя оба алгоритма содержат в себе нужную фокусировку поля, позволяющую в принципе “за-

глянуть” в область D_0 , содержащую искомые источники волн, в отличие от поля $w_-(\mathbf{x}, t)$, дающего в этом случае тождественный нуль.

В случае однородной среды полям (9),(10),(11) можно дать следующую физическую интерпретацию (рис.3). На этих рисунках $\bar{B} \equiv \text{supp } f(\mathbf{x}, t)$ обозначает множество в \mathbb{R}^{3+1} , на котором сосредоточен источник f задачи (5). На рис.3а каждая точка (ξ, τ) источника излучает волны по боковой поверхности характеристического конуса “будущего”, являющегося носителем решения $G_-(\mathbf{x}, \xi, t - \tau)$.

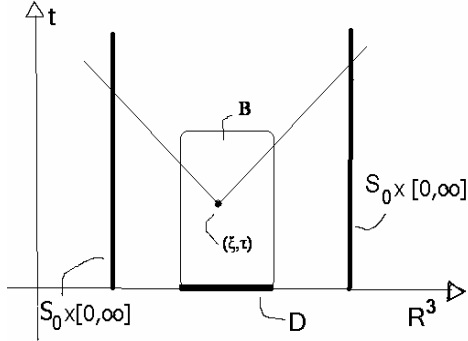


Рис.3а

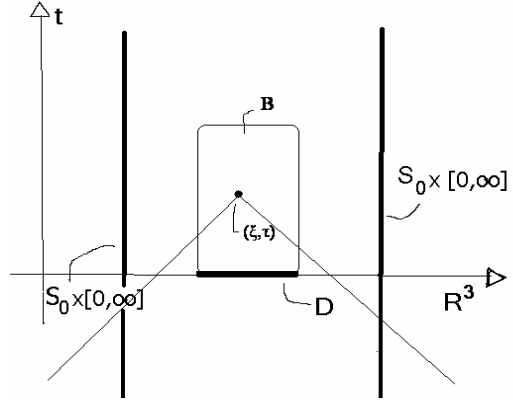


Рис.3б

На рис.3б каждая точка (ξ, τ) “источника” излучает волны по боковой поверхности характеристического конуса “прошлого”, являющегося носителем решения $G_+(\mathbf{x}, \xi, t - \tau)$. Но *источник, работающий в обратном времени, есть сток энергии, работающий в прямом, естественном, направлении времени* (см. рис.1б). Поэтому рис.3б допускает следующую интерпретацию: волны для $t < \tau$ излучаются из бесконечности, собираются в точку (ξ, τ) , в которой затем исчезают [4]. После включения такого “источника” для $t > \tau$ в среде воцаряется покой.

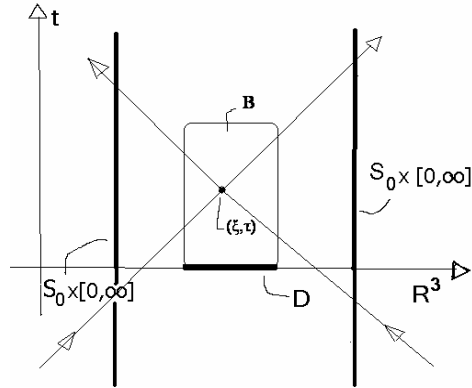


Рис.3с

Рис.3с соответствует выбору фундаментального решения $G_*(\mathbf{x}, \xi, t - \tau)$. В этом случае работают обе части характеристического конуса, направленные и в “прошлое” и в “будущее”. Учитывая выше сказанное относительно стоков энергии, рис.3с отображает процесс фокусировки поля: волны для $t < \tau$ излучаются из бесконечности, фокусируются при $t = \tau$ в точку $(\mathbf{x} = \xi)$, а затем снова расходятся в пространстве [4].

Полную картину влияния источника (стока) энергии можно получить объединением соответствующих границ конусов, пробегая точкой (ξ, τ) множество B .

Решение основного интегрального уравнения первого рода (11) в общем случае произвольной $f(\mathbf{x}, t)$ неоднозначно. Множество источников, распределенных внутри D_0 и не меняющих след поля u_0 и его нормальную производную μ (и, следовательно, продолженное поле w_* из (12)), составляют так называемые “неизлучающие” источники: они не излучают с точки зрения наблюдателя, находящегося на замкнутой поверхности S_0 , но различны внутри D_0 [8,9].

Для источников, обладающих специальной структурой строения, в частности, мгновенно действующих во времени (данные Коши):

$$f(\mathbf{x}, t) = -c_0^{-2} f(\mathbf{x}) \delta'(t)$$

единственность решения обратной задачи имеет место [10]. В этом случае дополнительное поле $u_+(\mathbf{x}, t)$ из (10) отлично от нуля только для $t < 0$ и является нечетным продолжением истинного поля $u(\mathbf{x}, t)$ на отрицательные времена: $u_+(\mathbf{x}, t) = -u(\mathbf{x}, -t)$. В результате функциональная связь (8) между истинным и продолженным полями принимает вид:

$$w_*(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} u(\mathbf{x}, t) & \text{для } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, -t) & \text{для } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t < 0 \end{cases}$$

который определяет четную по t функцию $w_*(\mathbf{x}, t)$ в \mathbb{R}^{3+1} .

Искомое решение обратной задачи дается фиксацией продолженного поля в момент $t = 0$:

$$\begin{cases} w_*(\mathbf{x}, 0) = u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) \\ \partial_t w_*(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u(\mathbf{x}, 0) = 0 \end{cases}$$

Изложенный выше подход к решению обратной задачи по восстановлению источников волн составляет основу для построения приближенных решений обратной задачи дифракции. Область D на рис.2 теперь обозначает носитель вторичных источников волн, связанных с неоднородностью среды. Основное направление исследований здесь заключается в том, чтобы свести задачу рассеяния волн к задаче с мгновенно действующими источниками (задаче Коши), к решению которой и применяется обращенное (во времени) продолжение поля. Такого сведения задач удастся добиться с помощью специальных преобразований волнового поля, выполняемых только во временной области, и лишь в линеаризованном, так называемом борновском, описании процесса рассеяния волн [11].

Литература

1. Морс Ф., Фешбах Г. "Методы теоретической физики". Том I, М., ИЛ, 1958
2. Михайлов В.П. "Дифференциальные уравнения в частных производных". - М: Наука - 1976, 392 с.
3. "Функциональный анализ" /под ред. С.Г. Крейна/, серия "СМБ", М.: Физматгиз, 1972, 544 с.
4. Цибульчик Г.М. "О формировании сейсмического изображения на основе голографического принципа" // Геология и геофизика – 1975 -- № 11 -- С.~ 97-106
5. Положий Г.Н. "Уравнения математической физики". - М: Высшая школа – 1964, 560 с.
6. Fulks W., Guenther R. "Hyperbolic potential theory" // Archive Rat. Mech. Anal. -1972 – vol. 49, No 2 – pp.72-88
7. Владимиров В.С. "Уравнения математической физики". М.: Наука - 1971, 512 с.
8. Bleistein N., Cohen J., "Nonuniqueness in the inverse source problem in acoustics and electromagnetics", Journal of Mathematical Physics, 1977, Vol. 18, No. 2, pp. 194-201.
9. Алексеев А.С., Цибульчик Г.М. "О связи обратных задач теории распространения волн с задачами визуализации волновых полей", ДАН СССР, 1978, Том 242, №5, С. 1030-1033.
10. Бухгейм А.Л., Кардаков В.Б. "О некоторых обратных задачах для уравнений гиперболического типа". - Новосибирск: ВЦ СО АН СССР -- препринт № 65 -- 1977
11. Цибульчик Г.М. "Продолжение волновых полей в обратных задачах сейсмологии" // Дисс. ... докт. физ-мат наук. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1985, 302с.