Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Формула Карлемана для системы уравнений электродинамики на плоскости

Э. В. Арбузов*, **А. Л. Бухгейм****

* ИМ СО РАН,
пр. Ак. Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: arbuzov@math.nsc.ru

** ИМ СО РАН,
пр. Ак. Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: bukhgeim@math.nsc.ru

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ(код проекта 05-01-00250), Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН 2006-48, Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ - 7157.2006.1), второго автора - при частичной поддержке NSF Grant DMS-0505470.

Система уравнений Максвелла для периодических по времени полей записывается в виде

$$rotH = \frac{4\pi\sigma - i\omega\varepsilon}{c}E + \frac{4\pi}{c}j,$$

$$rotE = \frac{i\omega\mu}{c}H,$$

где E, H — векторы напряженности электрического и магнитного поля, $j = j(x)$ — плотность внешних токов, ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемость, σ — проводимость среды, ω — частота колебаний.

В случае, когда электродинамические параметры среды и внешний ток не зависят от одной из координат, система уравнений Максвелла приводится к двум уравнениям Гельмгольца на плоскости относительно тех компонент электрического и магнитного поля, которые соответствуют этой координате, а остальные компоненты находятся дифференцированием.

В случае, когда характеристики поля измеряются или задаются внешним током только на части границы исследуемой области, для нахождения векторов E, H внутри области требуется решить задачу Коши для уравнения Гельмгольца.

Решения данной задачи дается формулой типа Карлемана. В работе данная формула получена для более общего случая эллиптического уравнения второго порядка в каноническом виде, при этом используется метод, предложенный в [1] Г. М. Голузиным и В. И. Крыловым, позволяющий найти решение с помощью дополнительной функции со специальными свойствами на границе области.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — ограниченная односвязная область с границей класса C^1_α, $0 < \alpha < 1$, $M \subset \partial\Omega$ — участок границы, состоящий из объединения конечного числа замкнутых дуг.

Для функции $u(x,y) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ рассматривается задача Коши:

$$\Delta u(x,y) + a_1(x,y)u_x(x,y) + a_2(x,y)u_y(x,y) + a_0(x,y)u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,y)|_M = u_0(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}u(x,y)|_M = u_1(x,y),$$

где коэффициенты $a_0(x,y) \in C(\overline{\Omega})$, $a_1(x,y), a_2(x,y) \in C^1(\overline{\Omega})$, данные Коши $u_0(x,y) \in C^1(M)$, $u_1(x,y) \in C(M)$, и $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — вектор единичной внешней нормали.

Используя следующие обозначения:

$$z = x + iy, \quad u(z) = u(x, y), \quad \mathbf{d}\eta = d\eta_1 d\eta_2,$$

$$2\bar{\partial} = \partial_x + i\partial_y, \quad 2\partial = \partial_x - i\partial_y,$$

$$\mathbb{P}(A)(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{A(\eta)}{\eta - \zeta}\,\mathbf{d}\eta, \quad \bar{\mathbb{P}}(A)(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{A(\eta)}{\bar{\eta} - \bar{\zeta}}\,\mathbf{d}\eta,$$

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 2\bar{\partial} & 0 \\ 0 & 2\partial \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} \\ q_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

уравнение (1) можно представить в виде эллиптической системы уравнений первого порядка.

Лемма 1. *Пусть* $A(z) = a_1(z) - ia_2(z)$,

$$u_1(z) = e^{\frac{1}{4}\mathbb{P}\bar{A}}u(z), \qquad u_2(z) = e^{\frac{1}{4}\bar{\mathbb{P}}A}(2\bar{\partial}u(z) + \frac{1}{2}\bar{A}(z)u(z)),$$

и

$$q_{12} = -e^{\frac{1}{4}(\mathbb{P}\bar{A} - \bar{\mathbb{P}}A)}, \quad q_{21} = -e^{\frac{1}{4}(\bar{\mathbb{P}}A - \mathbb{P}\bar{A})}(\partial\bar{A}(z) + \frac{1}{4}|A(z)|^2 - a_0(z)),$$

Тогда уравнение (1) можно записать в виде системы для вектор-функции $\mathbf{u}(z) = (u_1(z), u_2(z))$:

$$L\mathbf{u} = (\mathcal{D} + Q)\mathbf{u} = 0.$$

При выводе соответствующей формулы Карлемана используется следующее утверждение.

Лемма 2. *Если* $\mathbf{g} = (g_1, g_2) \in L_p(\Omega),\ p > 1, \quad q_{12}, q_{21} \in C(\Omega)$, *то можно указать число* τ_0, *такое что при* $\tau > \tau_0$ *существует решение* $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ *системы*

$$2\bar{\partial}w_1(\zeta) - q_{21}e^{-i\tau\chi(\zeta)}w_2(\zeta) = g_1(\zeta),$$

$$2\partial w_2(\zeta) - q_{12}e^{i\tau\chi(\zeta)}w_1(\zeta) = g_2(\zeta),$$

где $\chi(\zeta)$ *- мнимая часть некоторой аналитической в* Ω *функции, и* τ *- вещественное число. При этом для этого решения выполняется оценка*

$$||\mathbf{w}||_{L_p(\Omega)} \leq C||\mathbf{g}||_{L_p(\Omega)},$$

где константа C *не зависит от* τ.

Для доказательства рассматривается система интегральных уравнений

$$w_1(\zeta) - \frac{1}{2}\mathbb{P}(q_{21}e^{-i\tau\chi}w_2) = \frac{1}{2}\mathbb{P}g_1,$$

$$w_2(\zeta) - \frac{1}{2}\bar{\mathbb{P}}(q_{12}e^{i\tau\chi}w_1) = \frac{1}{2}\bar{\mathbb{P}}g_2,$$

при этом,

$$w_2(\zeta) - \frac{1}{4}\bar{\mathbb{P}}(q_{12}e^{i\tau\chi}\mathbb{P}(q_{21}e^{-i\tau\chi}w_2)) = \frac{1}{4}\bar{\mathbb{P}}(q_{12}e^{i\tau\chi}\mathbb{P}g_1) + \frac{1}{2}\bar{\mathbb{P}}g_2,$$

или

$$w_2 + \mathbb{S}(w_2) = g.$$

В силу свойств интегрального оператора Коши, доказанных в [2], оператор

$$\mathbb{S}w = -\frac{1}{4}\bar{\mathbb{P}}(q_{12}e^{i\tau\chi}\mathbb{P}(q_{21}e^{-i\tau\chi}\ w))$$

является вполне непрерывным в $L_p(\Omega),\ p>1$, а правая часть уравнения

$$g=\frac{1}{4}\bar{\mathbb{P}}(q_{12}e^{i\tau\chi}\mathbb{P}g_1)+\frac{1}{2}\bar{\mathbb{P}}g_2\in L_p(\Omega).$$

Используя дифференциальные свойства оператора $\mathbb{P}$, доказанные также в [2], показывается что, при τ большем некоторого τ_0 оператор $\mathbb{S}$ является сжимающим.

Основной полученный результат сформулирован в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(\zeta)$ — аналитическая в Ω функция, такая что*

$$\mathrm{Re}\varphi(\zeta)=\begin{cases}1, & \zeta\in M;\\ 0, & \zeta\in\partial\Omega\setminus M.\end{cases}$$

Матрица $\Phi(\zeta)=\begin{pmatrix}e^{\tau\varphi(\zeta)} & 0\\ 0 & e^{\tau\bar{\varphi}(\zeta)}\end{pmatrix}$, *и вектор-функция* $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-2\bar{\partial}\mathcal{E}(\zeta-z)\\ 0\end{pmatrix}$, *где* $\mathcal{E}(z)=-\frac{1}{2\pi}\mathrm{ln}r$,

$$L^\sharp=\mathcal{D}^*+(\Phi^*)^{-1}(\mathcal{D}^*\Phi^*)+(\Phi^*)^{-1}Q^*\Phi^*,\quad \mathbf{g}=\begin{pmatrix}0\\ -\bar{q}_{12}e^{\tau(\bar{\varphi}(\zeta)-\varphi(\zeta))}\ 2\bar{\partial}\mathcal{E}(\zeta-z)\end{pmatrix}.$$

Тогда существует число τ_0 такое, что при $\tau\geq\tau_0$, найдется вектор-функция $\mathbf{w}\in W_p^1(\Omega), 1<p<2$, которая является решением системы $L^\sharp\mathbf{w}=\mathbf{g}$, и для любого $z\in\Omega$ имеет место равенство

$$u(z)=e^{-\frac{1}{4}\mathbb{P}\bar{A}}\lim_{\tau\to\infty}\int_M e^{-\tau\varphi(z)}<\Phi\mathbf{u},(\nu_1 I-i\nu_2 J)(\mathbf{w}-\mathbf{v})>ds,$$

где $J=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, *и выполняется оценка*

$$\forall\ \varepsilon>0\quad |u(z)|\leq\varepsilon l(u)+C(\varepsilon)||u||_{C^1(M)},$$

где

$$l(u)=||u||_{C^1(\partial\Omega\setminus M)},$$

$$C(\varepsilon)=\varepsilon^{1-1/\psi(z)}(\psi(z)/C_0)^{-1/\psi(z)},\quad \psi(z)=\mathrm{Re}\ \varphi(z),$$

а C_0 — константа, зависящая от $||\mathcal{E}(\zeta-z)||_{C^1(\partial\Omega)}$, $|\partial\Omega|$, $||A||_{C(\Omega)}$, $||\partial\mathcal{E}||_{L_p(\Omega)}$.

Литература

1. *Голузин Г. М., Крылов В. И.* Обобщенная формула Carleman'а и ее применения к аналитическому продолжению функций. Мат. сб. 1933. Т. 40, № 2. С. 144–149.

2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.