Международная конференция "Обратные и некорректные задачи математической физики", посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Резонансные и антирезонансные состояния в задаче рассеяния на самоподобных квантовых графах

А.Н. Бондаренко*, **В.А. Дедок****

* ИМ СО РАН,
пр. Ак. Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: bondar@math.nsc.ru

** ИМ СО РАН
пр. Ак. Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: vasily.a.dedok@gmail.com

Работа поддержана грантами РФФИ 05-01-0059, 05-01-00171, НШ-7157.2006.1, междисциплинарным интеграционным проектом СО РАН N48, Intel Scholarship Grant.

Дифференциальные операторы на графах были введены в работе Н. Герасименко и Б. Павлова [1]. Рассмотренная ими модель оказалась интересной не только с математической, но и с практической точки зрения. Недавние исследования в этой области показали связь между этими задачами и описанием поведения электронов в особого вида средах со структурой близкой к одномерной [2], например, таких как наноэлектронные устройства [3].

Ранее задачи такого типа исследовались на так называемых некомпактных графах, состоящих из конечного числа ребер конечной длины и конечного числа присоединенных к нему полубесконечных ребер. Поэтому вопрос о постановке задачи рассеяния для операторов Шредингера на квантовых графах с бесконечным числом внутренних ребер или самоподобной внутренней структурой представляет собой некоторый научный интерес, т. к. физические свойства объектов, соответствующих рассматриваемым моделям, существенно отличаются от изучаемых ранее.

Квантовым графом G будем называть компактный граф, состоящий из конечного множества вершин, соединенных конечным множеством ребер конечной длины, вместе с определенным на нем оператором Шредингера $H = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$. Потенциал $q(x)$ предполагается вещественным, измеримым и с конечным первым моментом [1]. В вершинах графа задаются граничные условия, обеспечивающие самосопряженность оператора.

Присоединив к компактному графу полубесконечные ребра получим так называемый *некомпактный квантовый граф*. Центральным объектом исследования в теории рассеяния на некомпактных квантовых графах является *матрица рассеяния* $S(k)$, определяемая решением уравнения $H\Psi = k^2\Psi$ со следующими асимптотиками на полубесконечных ребрах

$$\psi_l^j(x,k) = S_{lj}(k)e^{ikx} + o(1), \quad x \to \infty, x \in E_j, 1 \le j, l \le n, j \ne l,$$
$$\psi_l^l(x,k) = e^{-ikx} + S_{ll}(k)e^{ikx} + o(1), \quad x \to \infty, x \in E_l, 1 \le l \le n.$$

Задача нахождения данных рассеяния в некотором смысле является некорректно поставленной, т.к. даже достаточно малым изменениям структуры графа соответствует очень сильные изменения данных рассеяния.

Особый интерес представляет изучение свойств оператора рассеяния на объектах с самоподобной структурой, например конечно-разветвленной салфетке Серпинского. Доказана следующая

Теорема 1. *Данные рассеяния оператора Шредингера со стандартными граничными условиями в вершинах последующих итераций конечно-разветвленной салфетки Серпиинского связаны следующими соотношениями:*

$$R_{n+1}(k) = R_n(k/3) + [b_{n1}(k/3)e^{ik/3} + a_{n2}(k/3)]T_n(k/3),$$
$$T_{n+1}(k) = [a_{n1}(k/3) + b_{n2}(k/3)e^{ik/3}]T_n(k/3).$$

Коэффициенты a_{n1}, a_{n2}, b_{n1} *и* b_{n2} *– суть рациональные функции от* $R_n(k)$, $T_n(k)$ *и* e^{ik}. Доказательство теоремы 1 можно найти в работе [4].

Указанные соотношения позволяют проследить поведение так называемых антирезонансных состояний. Энергетическое состояние k_0 назовем *антирезонансным*, если $T_{ij}(k_0) = 0$ для всех $i, j \neq 0$. Справедлива следующая теорема [5]:

Теорема 2. *Пусть некоторое антирезонансное состояние* n*-того приближения конечно-разветвленной салфетки Серпинского соответствует энергии* k_0*, тогда существует антирезонансное состояние* $n+1$*-ого приближения соответствующее энергии* $3k_0$*. Иными словами, каждое последующее приближение салфетки Серпинского растягивает антирезонансные состояния предыдущей в три раза.*

Не меньший интерес представляет исследование резонансов – *комплексных полюсов* S*-матрицы.* Стоит отметить, что резонансные состояния подчиняются более сложным правилам преобразования от одной итерации к последующей. Явные формулы, в отличие от антирезонансных состояний удается получить пока лишь в самых простых случаях:

Теорема 3. *Пусть* G_1 *– граф, представляющий собой первую итерацию конечно-разветвленной салфетки Серпинского. Тогда резонансные состояния оператора Шредингера со стандартными граничными условиями в вершинах расположены в точках* $2\pi n$*,* $n = -\infty \dots \infty$*. Ширина каждого резонанса неизменна и равна* $2 \ln 3$.

Список литературы

[1] Н. И. Герасименко, Б. С. Павлов, ТМФ, т. 74, є3, с. 345-359 (1988)

[2] P. Kuchment. Waves Random Media. **12**, pp. R1-R24 (2002)

[3] Yu. B. Melnikov, B. S. Pavlov. J. Math. Phys. **36** (6), pp. 2813-2825 (1995).

[4] А. Н. Бондаренко, В. А. Дедок. Сибирский журнал индустриальной математики. Том VII, **N4** (20), стр. 16-28 (2004).

[5] A. N. Bondarenko, V. A. Dedok. Analytical methods of analysis and differential equations. Abstracts of reports. pp. 26 (2006).