Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Некоторые подходы к задаче численного восстановления сингулярного носителя векторного поля

Е.Ю. Деревцов*, **В.В. Пикалов****

* ИМ СО РАН,
пр. Ак. Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: dert@math.nsc.ru

** ИТПМ СО РАН,
Институтская, 4,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: pickalov@itam.nsc.ru

Работа первого автора была поддержана РФФИ (гранты 04-01-04003, 05-01-00611), Математическим Отделением РАН (проект 1.3.1), СО РАН (проекты 2006-03, 2006-48), работа второго автора была поддержана РФФИ (гранты 04-01-04003, 05-08-50308, 07-01-00318), СО РАН (проект 2006-35)

Требование гладкости математического объекта является основным для множества основополагающих результатов математического анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, теории обратных задач для уравнений математической физики и многих других.

Тем не менее, существует немало интересных и практически важных естественнонаучных и технических областей, в которых объекты математически описываются характеристиками или величинами, терпящими разрыв. Такого рода объекты с неизбежностью возникают в исследованиях с использованием дистанционных методов и, в частности, в томографии. Упомянем лишь два примера задач такого рода. В дефектоскопии обнаружение трещин в промышленных изделиях посредством неразрушающего контроля, по-видимому, более важная задача, нежели определение отклонений внутреннего строения изделия от эталона. Во многих задачах геофизики установление местоположения границ, разделяющих блоки с различными физическими свойствами, является первым этапом в дальнейших исследованиях, направленных на определение тех или иных физических величин, характеризующих внутреннее строение Земли.

В процессе становления томографии как самостоятельной научной дисциплины проблема реконструкции объектов с разрывными физическими свойствами выделилась в самостоятельную задачу. Теоретическое описание объектов с разрывными свойствами в рамках интегральной геометрии было предложено в 1962 году в монографии И. М. Гельфанда [1]; дальнейшее развитие теории, уже в томографических постановках, можно найти, например, в работах Гельфанда, Паламодова, и других.

В настоящее время в томографии развито огромное число алгоритмов и программных средств, направленных на восстановление внутренних свойств объекта по данным томографического типа. При этом используются подходы, основанные на формулах обращения, вариационные и алгебраические методы. Все они хорошо проявляют себя на гладких объектах, и в то же время не “срабатывают“ должным образом, если объект обладает разрывными характеристиками. Этот факт хорошо известен исследователям в области томографии. Таким образом, возникла потребность в разработке специальных алгоритмических средств, направленных на реконструкцию: а) множеств разрывов исследуемого объекта; б) определение, наряду с таким множеством, и величины скачка, характеризующего разрыв.

По-видимому, первой работой, достигшей цели определения множества разрывов, была статья Е. Вайнберга с соавторами, опубликованная в 1985 г. Основная идея состоит в предварительном двойном дифференцировании по переменной s (расстояние от прямой, по которой производится интегрирование, до начала координат) томографических данных, представляющих собой двумерное преобразование Радона, с последующим применением оператора обратного проектирования. В дальнейшем такая последовательность действий, приводящая к выделению множества разрывов, но при этом дающая лишь весьма общее представление о поведении гладкой составляющей объекта, получила название

“оператора Вайнберга“. Следует отметить, что оператор Вайнберга не является формулой обращения. Именно, нелокальный псевдодифференциальный оператор, используемый в формулах обращения, заменяется локальным дифференциальным оператором двойного дифференцирования, что существенно упрощает его программную реализацию, но не позволяет восстановить гладкую часть объекта.

Дальнейшее развитие подходов и алгоритмических средств восстановления множества разрывов как в двумерном, так и в трехмерном случаях, осуществляли, в рамках *локальной томографии*, такие исследователи как А. Фаридани с соавторами, А. К. Луис и П. Маасс, и многие другие. В этих работах, в основном, наряду с оператором Вайнберга, использовался и оператор обращения (преобразования Радона) Кальдерона $\sqrt{-\Delta}$, в сочетании с регуляризацией либо той или иной фильтрацией. Основная цель этих исследований состояла в восстановлении множества разрывов, а также в возможности определения некоторых, в той или иной степени усредненных, характеристик гладкой составляющей объекта.

В конце 90-х годов Д. С. Аниконовым был предложен иной подход к решению задачи определения множества разрывов функции по данным томографического типа, основанный на теории многомерных сингулярных интегралов [2]. Применяя к лучевому преобразованию оператор обратного проектирования, получаем сингулярный интеграл (с искомой разрывной функцией в качестве подынтегрального выражения) со слабой особенностью. Дифференцирование по пространственным переменным приводит тогда к логарифмическому возрастанию при стремлении точки к линии разрыва. В частности, можно использовать оператор $|\nabla(\cdot)|$. Описанный подход теоретически обоснован [3], [4], а также реализован алгоритмически и программно, в том числе и для модели среды, в которую включено явление рассеяния [3].

Следуя логике развития постановок и методов решения “классической задачи восстановления разрывов“, кратко изложенного выше, мы предлагаем существенное ее обобщение как в постановочной части, так и в части аппарата, привлекаемого для ее решения. Во-первых, ставится цель определения множества разрывов не только скалярных, но и векторных и симметричных тензорных полей. Во-вторых, хотелось бы определять не только разрывы самих геометрических объектов, но и их производных. В этом случае мы говорим о *сингулярностях* либо о *сингулярном носителе*. Задача восстановления множества разрывов производных (в то время как сама функция непрерывна) представляется важной, так как в ряде конкретных применений томографии разрывы производных исследуемой величины могут быть предвестниками разрыва уже самой величины.

В настоящей работе рассматривается задача восстановления множества разрывов как самого векторного поля, так и его производных первого и второго порядков. Поле задано в единичном круге, метрика предполагается евклидовой.

Хорошо известно, что операторы продольного и поперечного преобразования, действующие на векторные поля, обладают ненулевыми ядрами. По этой причине сформулированная выше задача рассматривается в трех вариантах. Именно, восстанавливаются сингулярности либо соленоидальной части исходного векторного поля по его известному продольному лучевому преобразованию, либо его потенциальной части — по поперечному преобразованию. Наконец, восстанавливается сингулярный носитель исходного векторного поля, если совместно заданы его продольное и поперечное лучевые преобразования.

Оператор продольного лучевого преобразования, действующий на заданное в единичном круге B векторное поле $v(x,y)=(v_1(x,y),v_2(x,y))$, $s\in[-1,1]$, определяется соотношением

$$(\mathbf{P}v)(s,\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\langle\xi,v(s\xi^{\perp}+t\xi)\rangle dt=\int_{-\infty}^{\infty}(\xi^1v_1+\xi^2v_2)dt, \tag{1}$$

где $\xi=(\xi^1,\xi^2)=(\cos\alpha,\sin\alpha)\in\mathrm{S}^1$ — единичный направляющий вектор параллельного пучка прямых, по которым производится интегрирование. Оператор поперечного лучевого преобразования отличается от оператора (1) незначительно,

$$(\mathbf{P}^{\perp}v)(s,\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\langle\xi^{\perp},v(s\xi^{\perp}+t\xi)\rangle dt=\int_{-\infty}^{\infty}\Big((\xi^{\perp})^1v_1+(\xi^{\perp})^2v_2\Big)\,dt. \tag{2}$$

Оператор обратного проектирования, являющийся частным случаем интегрального *оператора m-углового момента*, будучи примененным к заданному лучевому преобразованию векторного поля, в результате дает векторное поле с компонентами

$$\begin{aligned} \mu_1(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi^1(\mathbf{T}v)(s(x,y,\alpha),\xi(\alpha))d\alpha\,, \\ \mu_2(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi^2(\mathbf{T}v)(s(x,y,\alpha),\xi(\alpha))d\alpha\,, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\mathbf{T}$ — один из операторов (1) или (2). Отметим, что применение оператора m-углового момента приводит к многомерным сингулярным интегралам [2], а результатом его применения является симметричное тензорное поле соответствующего ранга m.

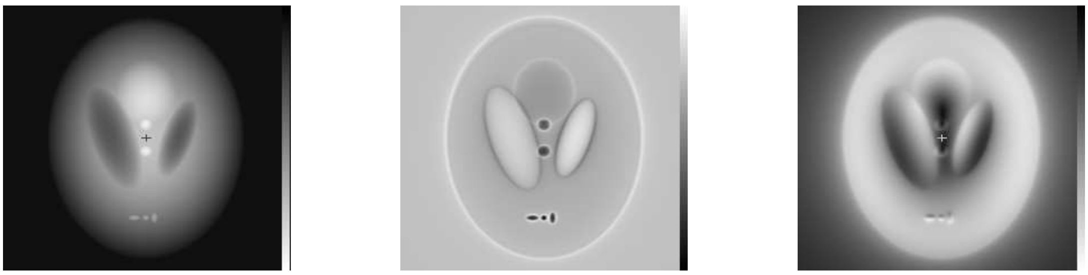
В работе предлагается набор инструментов для восстановления сингулярного носителя векторного поля, ранее, насколько известно авторам, в томографии векторных полей не использовавшихся. Наряду с дифференцированием по s и по углу φ лучевых преобразований векторного поля, используются, после обратного проектирования, и операторы ∇ и $|\nabla(\cdot)|$, производная по направлению $\langle\nabla(\cdot),\xi\rangle$, а также операторы div и rot. Перечисленные операторы применяются не только индивидуально, но и в различных сочетаниях и последовательностях, которые дают возможность несколькими путями восстановить разрывы производных векторного поля.

Ниже приведены результаты лишь двух численных экспериментов. В первом восстанавливается множество разрывов первых производных скалярного поля. Для этого использовалась следующая модель:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \begin{cases} C(1-t^2)^\lambda & , \quad t \le 1, \\ 0 & , \quad t > 1, \end{cases} \\ t^2 &= \frac{((x-x_0)cos\phi + (y-y_0)sin\phi)^2}{a^2} + \frac{(-(x-x_0)sin\phi + (y-y_0)cos\phi)^2}{b^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Соответствующее преобразование Радона (синограмма), $\lambda > 0$, есть

$$\begin{aligned} f(s,\alpha) &= \frac{\sqrt{\pi}abC\Gamma(\lambda+1)}{|\zeta|\Gamma(\lambda+3/2)}\left(1-\frac{(s-s_0)^2}{\zeta^2}\right)^{\lambda+1/2}, \\ s_0 &= -x_0\sin\alpha + y_0\cos\alpha, \\ \zeta^2 &= a^2\sin^2(\alpha-\phi) + b^2\cos^2(\alpha-\phi). \end{aligned} \tag{5}$$



(а) (б) (в)

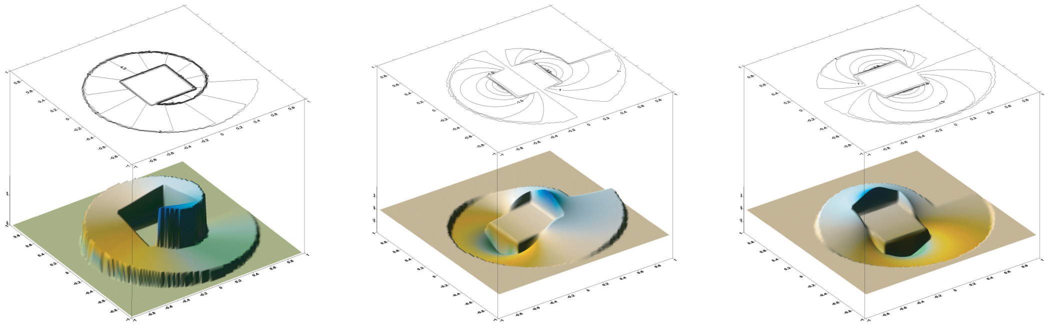
Рис. 1: Оригинал, $\lambda = 1$ (а); применение оператора Вайнберга (б); применение оператора $|\nabla|$ (в).

На Рис.1а помещено изображение “модели Шеппа-Логана“, причем все ее элементы сконструированы с носителями в форме эллипсов (4) с $\lambda = 1$. Оператор обратного проектирования, примененный к преобразованию Радона от этой функции, дает так называемое суммированное изображение. Действие оператора $|\nabla|$ на это изображение продемонстрировано на Рис.1в.

Во втором численном эксперименте восстанавливается множество разрывов векторного поля с компонентами, терпящими разрывы первого рода. С этой целью последовательно производятся следующие действия. Вычисляются компоненты μ_1, μ_2 по формулам (3), затем $Q_1(x,y) = \nabla\mu_1(x,y)$, $Q_2(x,y) = \nabla\mu_2(x,y)$, и, наконец, функция $Q(x,y) = \sqrt{|Q_1|^2 + |Q_2|^2}$. Последняя содержит в себе логарифмическую особенность и “показывает“ разрывы исходного векторного поля v. С помощью потенциала, заданного в полярных координатах,

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} r^2, & \text{если } |x| \le 1/4 \text{ и } |y| \le 1/4 \\ 4\pi - \phi, & \text{если } r \le \phi \text{ и } |x| > 1/4 \text{ и } |y| > 1/4 \\ 2\pi - \phi, & \text{если } \phi < r \le \phi + 2\pi \text{ и } |x| > 1/4 \text{ и } |y| > 1/4 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{6}$$

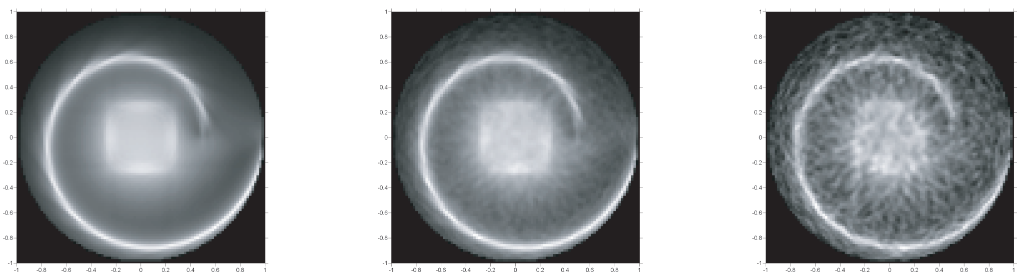
строится соленоидальное векторное поле $v = (v_1, v_2) = (\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x})$. Его потенциал и компоненты изображены на Рис.2.



(а) (б) (в)

Рис. 2: Потенциал (6) (а); 1-я компонента поля (б); 2-я компонента поля (в).

Результаты восстановления разрывов векторного поля, образованного с помощью потенциала (6) отражены на Рис.3. Использовались данные с шумом различного уровня.



(а) (б) (в)

Рис. 3: Векторное поле с потенциалом (6), результат применения оператора $|\nabla|$ к данным с шумом: точные данные (а); шум уровня 5% (б); шум уровня 20% (в).

Литература

1. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, *Обобщенные функции, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, выпуск 5.* М.: ГИФМЛ, 1962.

2. С. Г. Михлин, *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.* М.: ГИФМЛ, 1962.

3. Д. С. Аниконов, А. Е. Ковтанюк, И. В. Прохоров, *Использование уравнения переноса в томографии.* М.: Логос, 2000.

4. Д. С. Аниконов, *Специальная задача интегральной геометрии.* Доклады РАН, 2007, принято к печати.