Международная конференция "Обратные и некорректные задачи математической физики",
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Использование локальных базисов в задачах скалярной и векторной томографии рефрагирующих сред

Е.Ю. Деревцов*, **И.Е. Светов****

* ИМ СО РАН,
пр. Ак. Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: dert@math.nsc.ru

** НГУ,
ул. Пирогова, 1,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: svetoy@gorodok.net

Работа первого автора была поддержана РФФИ (гранты 04-01-04003, 05-01-00611), Математическим Отделением РАН (проект 1.3.1), СО РАН (проекты 2006-03, 2006-48), работа второго автора была поддержана РФФИ (грант 04-01-04003)

Общественная известность вычислительной томографии обусловлена, главным образом, ее широким применением и замечательными успехами в медицине. Менее известно использование томографических методов в других областях: радиоастрономии, электронной микроскопии, биологии, промышленности, а также физике Земли, океана и космоса. Что касается применений методов томографии для реконструкции нескалярных свойств объектов, описываемых, например, посредством векторных или тензорных полей, то эта область исследований известна лишь специалистам. Тем не менее, разработка именно этого направления в томографии выглядит наиболее многообещающей, как в плане создания новых математических методов, так и с точки зрения применений в научных исследованиях, биологии, медицине и промышленности.

Суть томографических (неразрушающих) методов состоит в многократных измерениях физического поля, "пропущенного" через объект исследования и, далее, в нетривиальной математической обработке и интерпретации результатов. Конечной целью использования таких методов является как можно более полные сведения о структуре и внутренних свойствах объекта. Как правило, результаты, полученные с помощью томографических методов, невозможно получить иными способами.

Простейшим элементом томографической схемы измерений является цепочка: источник — среда — приемник. В этой схеме основными объектами математических исследований являются модели сред и модели взаимодействий физических полей со средой. По-видимому, интересно и перспективно развитие математического аппарата томографии в следующих направлениях. Во-первых, это исследование нескалярных свойств объектов (векторные и тензорные поля). Во-вторых, усложнение математической модели среды с включением в нее явлений поглощения, рассеивания и рефракции. Наконец, это включение в модель сложных форм взаимодействия физического поля со средой. Следует отметить, что в томографии используются практически все известные физические поля.

Основополагающие работы П.Функа и И.Радона, послужившие источником математических методов томографии, были опубликованы в начале XX века. В этих работах впервые получены формулы обращения, на которых базируется большое число алгоритмов вычислительной томографии. Здесь следует отметить, что в рефрагирующих средах этот подход практически неприменим. До сих пор не удалось также применить и подходы, базирующиеся на преобразовании Фурье и теореме о центральном сечении. Таким образом, в распоряжении исследователей в настоящее время имеются лишь алгебраические и вариационные методы.

Постановки задач томографии, которые преследуют цель восстановления функций, хорошо известны. Задача же векторной томографии, состоящая в восстановлении векторного поля по интегралам, вычисленным от его продольной (поперечной) составляющей вдоль некоторого семейства геодезических заданной римановой метрики, менее исследована.

Томографические методы изучения потока жидкости или газа реализуется в различных научных

и инженерных дисциплинах. В качестве первого примера можно привести задачу восстановление распределения скоростей океанического течения по измерениям значений времен прохождения звука. Эта проблема была первой, поставленной как задача векторной томографии. Значительно позднее была поставлена задача допплеровской томографии, в которой на основе измерений допплеровского смещения частоты ультразвука восстанавливается распределение скорости кровотока в кровеносных сосудах. К постановкам векторной томографии приводят и задачи, связанные с восстановлением распределения напряжений вещества в металлах или электромагнитного поля в плазме.

Измерения в задаче реконструкции поля скоростей океанического течения осуществляются путем фиксации времен пробега звукового сигнала через область течения, и зависят от векторного поля следующим образом,

$$T(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \langle \mathbf{v}(x, y)\, ,\, d\mathbf{l} \rangle,$$

где $d\mathbf{l} = \tau dl$, τ — единичный направляющий вектор прямой, соединяющий точки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, и dl — элемент длины пути. Таким образом, преобразование векторного поля, задаваемое этим уравнением, представляет собой продольное лучевое преобразование векторного поля $\mathbf{v}(x, y)$ вдоль прямой, соединяющей точки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Поперечное лучевое преобразование векторного поля отличается от продольного лишь тем, что вдоль луча интегрируется нормальная к лучу составляющая поля.

В работе предложен конструктивный метод и алгоритм решения задач реконструкции скалярных или векторных полей, заданных в единичном круге. В модель среды включены явления рефракции и (или) поглощения. Исходными данными для решения задачи считаются известные веерное преобразование скалярного поля; продольное и (или) поперечное лучевые преобразования векторного поля. Для получения аппроксимации скалярного или векторного поля применяется метод наименьших квадратов. В качестве базисов используются локальные базисы, построенные на основе двумерных B-сплайнов.

Ранее для рефрагирующей среды с поглощением была численно решена, методом наименьших квадратов, задача скалярной томографии с использованием полиномиальных базисов [1]. Что касается задачи векторной томографии, то тот же подход использовался лишь для среды с прямолинейным характером распространения лучей, но не рефрагирующей [2]. Аналогичный подход позже был применен к задаче восстановления соленоидальной части симметричного тензорного поля по его известному продольному лучевому преобразованию [3].

В работе проведено тестирование предложенных алгоритмов для различных классов скалярных и векторных полей. Проверена применимость аппарата B-сплайнов к задачам скалярной и векторной томографии, поставленным в рефрагирующей среде. Здесь следует отметить, что, насколько известно авторам, базисы для векторных полей, построенные на основе B-сплайнов, численно используются впервые. Проведено сравнение точности восстановления локальными и полиномиальными базисами для скалярных и векторных полей. Исследована зависимости точности приближения от порядка сплайнов и от различных способы построения локальных базисов.

Литература

1. Derevtsov E. Yu., Kleshchev A. G., Sharafutdinov V. F. *Numerical solution of the emission 2D-tomography problem for a medium with absorption and refraction.* J. Inverse Ill-posed Problems, 1999, V. 7, № 1, p. 83–103.

2. Деревцов Е. Ю., Кашина И. Г. *Численное решение задачи векторной томографии с помощью полиномиальных базисов.* Сиб. Ж. Вычислительной математики, 2002, Т. 5, № 3, с. 233–254.

3. Derevtsov E. Yu. *An approach of direct reconstruction of a solenoidal part in vector and tensor tomography problems.* J. Inverse Ill-Posed Problems, 2005, V. 13, № 3, p. 213–246.