Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Производящие функции для обобщенных функций Бесселя (ОФБ), содержащих числа Стирлинга второго рода

М.Д. Хриптун*

* ИМ СО РАН,
пр. Ак. Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: Khriptun@math.nsc.ru

Известно, что производящие функции для различных классических специальных функций и полиномов широко применяются для решений соответствующих дифференциальных уравнений в частных производных.

В данном докладе приводим теорему о производящих функциях для одного обобщения функций Бесселя вида:

$$U^m_{\nu_m}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/m)^{\nu_m+mk}}{k!\Gamma\big[(m-1)k+\nu_m+1\big]}\qquad(z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0];\ \nu_m\in\mathbb{C}),\tag{1}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, $\mathbb{C}$ — пространство комплексных чисел[1] (см. [1], стр. 287, формула (3)).

Теорема. *Пусть для ОФБ (1) имеет место производящая функция вида:*

$$\left(1+\frac{mt}{x}\right)^{-\nu_m/m}U^m_{\nu_m}\big[(x^m+mtx^{m-1})^{1/m}\big]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}U^m_{\nu_m+k(m-1)}(x)\qquad\left(\nu_m\in\mathbb{C};\ |t|<\frac{|x|}{m}\right),\tag{2}$$

где $x^m=z$ и $mtx^{m-1}=h$ (см. [1], стр. 291, формула (24) — разложение типа Ломмеля).

Заменяя ν_m на ν_m+n на основании теоремы Сриваставы (см. [2], стр. 754, Теорема 1) получим совокупность производящих функций для $U^m_{\nu_m}(z)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}U^m_{\nu_m+k(m-1)}(x)z^k=\left(1+\frac{mz}{x^{m-1}}\right)^{-\nu_m/m}\sum_{k=0}^{n}S(n,k)U^m_{\nu_m+k(m-1)}\big[(x^m+mzx)^{1/m}\big]z^k\left(1+\frac{mz}{x^{m-1}}\right)^{-k/m}$$
$$\left(\nu_m\in\mathbb{C};\ |z|<\frac{|x|^{m-1}}{m};\ n\in\mathbb{N}_0:\mathbb{N}\bigcup\{0\}\right),\tag{3}$$

если каждый член формулы (3) существует, где $S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum\limits_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\begin{pmatrix}k\\ j\end{pmatrix}j^n$ — числа Стерлинга второго рода, $\mathbb{N}:=\{1,2,3,\ldots\}$.

Доказательство теоремы основано на соответствующих удачных заменах переменных z и x и на том, что

$$S(n,0)=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

Замечание. Следует заметить, что при $n=0$ формула (3) переходит в формулу (2) при $z=tx^{m-2}$, а когда $m=2$, $\nu_m=\nu_2=\nu$, формула (3) переходит в соответствующие формулы для функций Бесселя $I_\nu(z)$ и $J_\nu(z)$ (см. [3], стр. 141, уравнение 5.22(5)).

[1] Функция $U^m_{\nu_m}(z)$ при $m=2$ превращается в модифицированную функция Бесселя $I_\nu(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}$, где $\nu_2=\nu$ и $U^2_{\nu_2}(z)=I_\nu(z)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хриптун М. Д.* Теоремы умножения для решений обобщенного дифференциального уравнения Бесселя m-го порядка // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11, № 2. С. 287–293.

2. *Srivastava H. M.* Some families of generating functions associated with the Stirling numbers of the second kind // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 251. P. 752–769.

3. *Watson G. N.* A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge, London, New York: Cambridge University Press. 1944. Second edition.