

Численное решение обратной задачи для уравнения переноса поляризованного излучения

А.Е. Ковтанюк

ИПМ ДВО РАН, ул. Радио, 7, 690041 Владивосток, Россия
E-mail: ankov@imcs.dvgu.ru

*Работа выполнена при государственной поддержке научных исследований, проводимых
ведущими научными школами РФ (грант НШ-9004.2006.1) и в рамках гранта
№ 06-II-CY-01-001 конкурса интеграционных проектов ДВО РАН с научными
учреждениями Сибирского и Уральского отделений РАН.*

Исследуется задача определения коэффициента ослабления векторного уравнения переноса. Метод нахождения коэффициента основан на использовании источника внешнего излучения специального типа, имеющего разрывы первого рода по угловой переменной. В скалярном случае этот метод решения обратной задачи применялся в работе [1]. В недавней статье авторов [2] был предложен и обоснован метод определения коэффициента ослабления для векторного уравнения. Основной упор в настоящей работе сделан на численную проверку предложенного метода, с целью подчеркнуть особенности и выделить преимущества предложенного алгоритма по сравнению с аналогичным подходом для скалярного уравнения переноса.

1. Постановка и решение обратной задачи для векторного уравнения переноса

Основной характеристикой поляризованного излучения является четырехмерный вектор параметров Стокса $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$. Соответствующее уравнение переноса в изотропной среде для этого вектора имеет вид

$$\omega \cdot \nabla_r f(r, \omega) + \mu(r) f(r, \omega) = \mu_s(r) \int_{\Omega} P(r, \omega, \omega') f(r, \omega') d\omega' + J(r, \omega), \quad (1)$$

где $r = (r_1, r_2, r_3) \in G$, G - выпуклая ограниченная область в трехмерном евклидовом пространстве \mathcal{E}^3 , $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathcal{E}^3 : |\omega| = 1\}$. В уравнении (1) функция $J(r, \omega)$ есть четырехкомпонентный вектор, описывающий внутренние источники излучения, $\mu(r)$ - коэффициент полного ослабления, $\mu_s(r)$ - коэффициент рассеяния, $P(r, \omega, \omega')$ - матрица рассеяния размерности 4×4 . Под символом $\omega \cdot \nabla_r f(r, \omega)$ будем понимать четырехкомпонентную вектор-функцию, i -ая компонента которой представляет собой производную функции $f_i(r, \omega)$ в направлении ω относительно пространственной переменной r .

Для характеристики неоднородности среды G , в которой изучается процесс переноса излучения, введем в рассмотрение некоторое разбиение G_0 области G . Множество G_0 предполагается открытым и плотным в G , то есть $\overline{G_0} = \overline{G}$. Кроме того, пусть оно является объединением конечного числа областей G_i .

Предположим, что множество G_0 обладает свойством обобщенной выпуклости [3], то есть любой луч, исходящий из точки $r \in G_0$ в направлении $\omega \in \Omega$ пересекает ∂G_0 в конечном числе точек.

Обозначим через $C_b(X)$, $X \in \mathcal{E}^m$ банахово пространство функций, определенных на \overline{X} , ограниченных и непрерывных на X , с нормой

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Аналогично определим пространство $C_b^{(4)}(X)$, образованное вектор-функциями $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, каждая компонента которой принадлежит $C_b(X)$, и соответствующая норма определяется равенством

$$\|f\|_4 = \max_{1 \leq i \leq 4} \|f_i\|.$$

Относительно коэффициентов уравнения (1) будем предполагать следующее. Функции $\mu(r)$, $\mu_s(r)$ – неотрицательные и принадлежат пространству $C_b(G_0)$, причем $\mu(r) \geq \mu_s(r)$, а вектор-функция $J(r, \omega) \in C_b^{(4)}(G_0 \times \Omega)$. Все компоненты матрицы рассеяния $P(r, \omega, \omega')$ принадлежат $C_b(G_0 \times \Omega \times \Omega)$.

Пусть $d(r, \omega)$ есть расстояние от точки $r \in \bar{G}$ до границы $\partial G = \bar{G} \setminus G$ в направлении ω .

К уравнению (1) присоединим граничные условия

$$f(r - d(r, -\omega)\omega, \omega) = h(r - d(r, -\omega)\omega, \omega), \quad (r, \omega) \in G_0 \times \Omega. \quad (2)$$

$$f(r + d(r, \omega)\omega, \omega) = H(r + d(r, \omega)\omega, \omega), \quad (r, \omega) \in G_0 \times \Omega. \quad (3)$$

Функции $h(\xi, \omega)$ и $H(\eta, \omega)$, задают входящее и выходящее из среды излучение. Сформулируем обратную задачу, которую по смыслу можно отнести к задаче томографии.

Задача томографии. *Определить функцию $\mu(r)$ из уравнения (1) и краевых условий (2), (3), если известны только функции h , H .*

Введем в рассмотрение множество Ω_0 , являющееся открытым подмножеством единичной сферы Ω

$$\Omega_0 = \Omega_- \cup \Omega_+, \quad \Omega_{\pm} = \{\omega \in \Omega : \text{sgn}(\omega_3) = \pm 1\}.$$

Будем полагать, что имеют место следующие ограничения на функцию h

1. Пусть

$$\tilde{h}(r, \omega) = h(r - d(r, -\omega)\omega, \omega) \in C_b^{(4)}(G_0 \times \Omega_0). \quad (4)$$

2. Хотя бы для одного i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ и для всех $\omega = (\omega_1, \omega_2, 0) \in \Omega$ справедливо

$$[\tilde{h}_i(r, \omega)] = \tilde{h}_i^+(r, \omega) - \tilde{h}_i^-(r, \omega) \neq 0, \quad r \in G_0, \quad (5)$$

где

$$\tilde{h}_i^{\pm}(r, \omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \tilde{h}_i\left(r, \frac{(\omega_1, \omega_2, \pm\varepsilon)}{1 + \varepsilon^2}\right).$$

Таким образом, мы предполагаем наличие разрыва первого рода у одной или более компонент функции $h(r, \omega)$ в горизонтальных направлениях ($\omega_3 = 0$).

Решение задачи томографии дает следующее утверждение [2].

Теорема. *Пусть функция h удовлетворяет условиям (4), (5) и выполняется соотношение (3), тогда для всех $r \in G_0$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, 0) \in \Omega$ справедливо равенство*

$$\int_{-d(r, -\omega)}^{d(r, \omega)} \mu(r + \omega t) dt = \ln \frac{[h_i(r - d(r, -\omega)\omega, \omega)]}{[H_i(r + d(r, \omega)\omega, \omega)]}. \quad (6)$$

В итоге, задача томографии свелась к задаче обращения двумерного преобразования Радона от функции μ . Отметим, что для нахождения интегралов в (6) можно использовать любые компоненты вектор-функций h и H , имеющие ненулевые разрывы по угловой переменной. Это обстоятельство будет использовано при проведении численных экспериментов в следующем параграфе.

2. Численное решение задачи томографии

Продemonстрируем работу алгоритма решения задачи томографии на следующем примере.

Пусть $G_0 = \bigcup_{i=1}^6 G_i$, где

$$\begin{aligned} G_1 &= \{r : (r_1 - 0.3)^2 + (r_2 - 0.1)^2 + r_3^2 < 0.04\}, & G_2 &= \{r : (r_1 + 0.3)^2 + (r_2 + 0.1)^2 + r_3^2 < 0.01\}, \\ G_3 &= \{r : (r_1 - 0.3)^2 + (r_2 - 0.1)^2 + r_3^2 < 0.09\} \setminus \overline{G_1}, & G_4 &= \{r : r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 < 0.64\} \setminus \{\overline{G_1} \cup \overline{G_2} \cup \overline{G_3}\}, \\ G_5 &= \{r : 0.64 < r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 < 0.81\}, & G_6 &= \{r : 0.81 < r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 < 1\} \end{aligned}$$

и функция $\mu(r)$ является кусочно постоянной в области G , т.е. $\mu(r) = \mu_i$ при $r \in G_i$. В численном эксперименте были взяты следующие значения коэффициентов: $\mu_1 = \mu_4 = \mu_6 = 1$, $\mu_2 = \mu_3 = \mu_5 = 2$, при 50% рассеянии в среде ($\mu_s(r) = 0.5\mu(r)$) и отсутствии внутренних источников излучения ($J(r, \omega) \equiv 0$).

В качестве матрицы $P(\omega, \omega')$ была взята матрица, описывающая рэлеевское рассеяние [4-5].

Были взяты следующие компоненты вектор-функции $h(r, \omega)$, соответствующей входящему излучению:

$$h_1 = \begin{cases} 1, & \omega_3 \geq 0, \\ 1.2, & \omega_3 < 0, \end{cases} \quad h_2 = \begin{cases} 0.2, & \omega_3 \geq 0, \\ 1, & \omega_3 < 0, \end{cases} \quad h_3 = \begin{cases} 0.4, & \omega_3 \geq 0, \\ 0.1, & \omega_3 < 0, \end{cases} \quad h_4 = 0.$$

Восстановление функции $\mu(r)$ осуществлялось в плоскости $r_3 = 0$. Сечение плоскости $r_3 = 0$ с областью G представляет собой круг радиуса 1. При восстановлении функции $\mu(r)$ использовалась параллельная схема сканирования [6].

Вычисление вектор-функции H проводилось с помощью метода Монте-Карло (метод максимального сечения [7]).

При проведении вычислительных экспериментов значение вектор-функции H аппроксимировалось суммой 21 слагаемого ряда Неймана, что обеспечило ошибку усечения менее 1%. Было взято 500 траекторий в одном эксперименте, и 5000 - в другом ($n = 500; 5000$). Нахождение преобразования Радона можно осуществить по скачку в одной из первых трех компонент функций h , H . То есть, по формуле (6) при $i = 1, 2, 3$. Первоначально преобразование Радона было вычислено при $i = 1$, $n = 500$, что соответствует алгоритму для скалярного уравнения переноса [1]. Используя алгоритм свертки и обратной проекции, были найдены значения функции $\mu(r)$ на равномерной сетке 400×400 в плоскости $r_3 = 0$. Результат восстановления представлен на рис. 1(а). Аналогичное восстановление при $i = 2$, $n = 500$ представлено на рис. 1(б). На рис.2(а,б) изображено восстановление функции μ по первым двум компонентам решения при $n = 5000$.

Приведенный вычислительный эксперимент демонстрирует, что использование скачка во второй компоненте вектор функции $h(\xi, \omega)$ позволяет получить более качественное восстановление. Отметим, что когда $[h_1(r - d(r, -\omega)\omega, \omega)] = 0$ было бы вообще невозможно решить обратную задачу методом, который соответствует скалярному случаю.

Таким образом, полученное обобщение алгоритма решения задачи томографии на случай векторного уравнения переноса поляризованного излучения позволяет в ряде случаев получить более качественное восстановление по сравнению с ранее использованным подходом. Для практических исследований это означает, что применение поляризованных источников специального типа существенно расширяет возможности методов неразрушающего контроля изделий при их радиационном облучении.

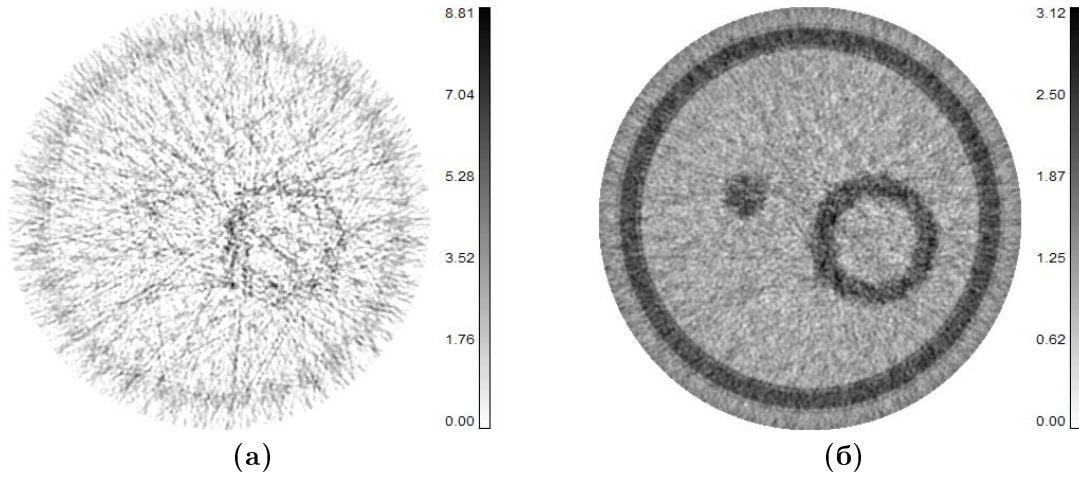


Рис. 1: Восстановление функции $\mu(r_1, r_2, r_3)$ в сечении $r_3 = 0$ для случая $n = 500$.
 (а) – реконструкция при $i = 1$; (б) – реконструкция при $i = 2$.

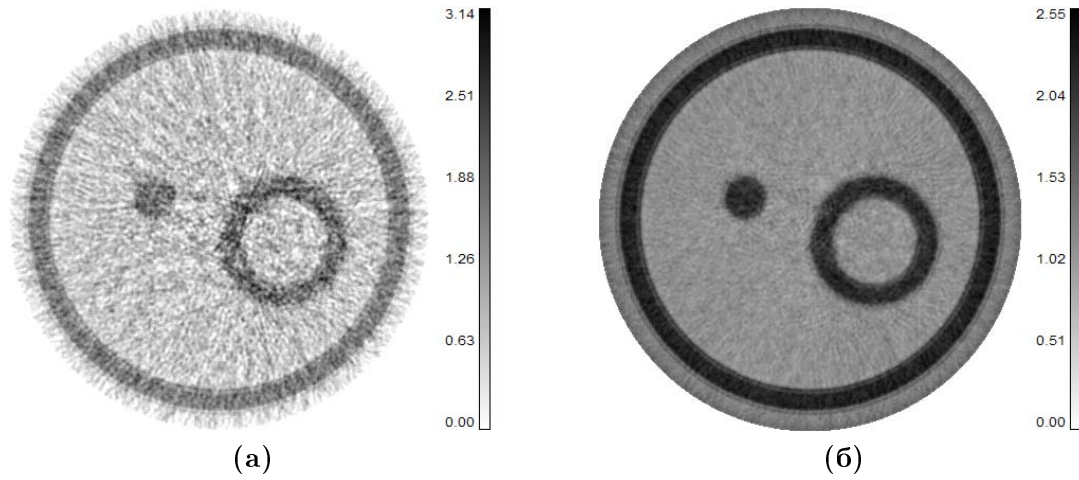


Рис. 2: Восстановление функции $\mu(r_1, r_2, r_3)$ в сечении $r_3 = 0$ для $n = 5000$.
 (а) – реконструкция при $i = 1$; (б) – реконструкция при $i = 2$.

Список литературы

1. *Anikonov D.S., Kovtanyuk A.E., and Prokhorov I.V.* Transport Equation and Tomography. – Utrecht-Boston. VSP. 2002. pp. viii+208.
2. *Kovtanyuk A.E., Prokhorov I.V.* Tomography problem for the polarized-radiation transfer equation// J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2006. Vol. 14. No. 6. pp. 1-12.
3. *Гермогенова Т.А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. – М.: Наука, 1986.
4. *Чандрасекар С.* Перенос лучистой энергии. М.: ИЛ, 1953.
5. *Розенберг Г.В.* Вектор-параметр Стокса. // Успехи физ. наук. 1955. Т. 56. N 1. С. 77-109.
6. *Natterer F.* The Mathematics of Computerized Tomography. – B.G.Teubner and John Wiley & Sons, Stuttgart, 1986.
7. *Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назарлиев М.А. и др.* Метод Монте-Карло в атмосферной оптике.– Новосибирск: Наука, 1976.