Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Некоторые дифференциальные тождества и их применение к уравнениям математической физики

А.Г. Меграбов*

* ИВМиМГ СО РАН,
пр. Ак. Лаврентьева, 6,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: mag@sscc.ru

Получен ряд дифференциальных тождеств 2-го и 3-го порядка в векторном и скалярном виде, связывающих лапласиан $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ произвольной гладкой функции $u(x, y)$, модуль ее градиента (величину $u_x^2 + u_y^2 = |\operatorname{grad} u|^2$) и величину $\operatorname{arctg}(u_y/u_x)$. В другом (эквивалентном) варианте эти тождества содержат также вторую скалярную функцию $n(x, y)$. Основное тождество имеет второй порядок; из него в качестве алгебраических и дифференциальных следствий получены другие дифференциальные тождества 2-го и 3-го порядка. Эти тождества содержат операторы Δ (Лапласа), grad, div, rot и выражения $u_x^2 + u_y^2$, $\operatorname{arctg}(u_y/u_x)$, Δu, $u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}$, $u_y(\Delta u)_x - u_x(\Delta u)_y$. Одно из этих тождеств (3-го порядка) имеет вид

$$\Delta \ln \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \Big(u_x \frac{\Delta u}{u_x^2 + u_y^2}\Big)_x + \Big(u_y \frac{\Delta u}{u_x^2 + u_y^2}\Big)_y = \operatorname{div} \bar{Q}, \qquad \bar{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta u}{u_x^2 + u_y^2}\, \operatorname{grad} u, \tag{1}$$

или

$$\operatorname{div} \bar{T} = 0, \qquad \bar{T} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \operatorname{grad} \ln (u_x^2 + u_y^2) - \bar{Q}$$

и эквивалентно тождеству

$$\frac{1}{2}\Delta \ln f - \Big\{\Big(u_x \frac{h}{f}\Big)_x + \Big(u_y \frac{h}{f}\Big)_y\Big\} = n^2(x, y) K(x, y),$$

где $f = (u_x^2 + u_y^2)/n^2(x, y)$, $h = \Delta u / n^2(x, y)$, $K(x, y) = -\Delta \ln n^2/(2n^2)$ — гауссова кривизна поверхности в трехмерном евклидовом пространстве с линейным элементом (римановой метрикой) $d\tau^2 = n^2(x, y)(dx^2 + dy^2)$, имеющему дивергентную форму

$$\operatorname{div}\big\{2\,\frac{h}{f} \operatorname{grad} u - \operatorname{grad} \ln f\big\} = \operatorname{div}\{\operatorname{grad} \ln n^2(x, y)\}.$$

Оно получено с помощью группового анализа как некоторое соотношение между дифференциальными инвариантами некоторой группы Ли и опубликовано в статье автора в Докладах РАН, 2004, т. 395, № 2. Там же, а также в статье автора в Докладах РАН, 2004, т. 394, № 6 даны некоторые приложения тождества (1) к уравнению эйконала $u_x^2 + u_y^2 = n^2(x, y)$, уравнению $(u_x^2 + u_y^2)/n^2(x, y) = \varphi(u)$, уравнению $(u_x^2 + u_y^2)/n^2(x, y) = u_t^2$, волновому уравнению вида $\Delta u / n^2(x, y) = P(x, y, t, u_t)u_{tt} + F(x, y, t, u_t)$ и др. Тождество (1) послужило отправной точкой для обнаружения остальных полученных тождеств. Из них получен ряд интегральных тождеств для области D с кусочно-гладкой границей S.

Данные дифференциальные и интегральные тождества целесообразно применять к линейным и нелинейным дифференциальным уравнениям, содержащим выражения $u_x^2 + u_y^2$, Δu, $u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}$, $u_y(\Delta u)_x - u_x(\Delta u)_y$. (Эти уравнения, кроме того, могут содержать (или не содержать) переменный параметр $n^2(x, y)$ (в частности, в виде коэффициента)). Например, к уравнению эйконала, линейным и нелинейным волновым уравнениям, уравнению Монжа — Ампера $u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy} = F(x, y)$, уравнениям движения идеальной жидкости для функции тока (уравнениям Эйлера) и др. С помощью полученных

тождеств можно преобразовывать известные дифференциальные уравнения математической физики к эквивалентному (более удобному или простому) виду, понижать порядок уравнения, обнаруживать новые соотношения между различными величинами, находить точные частные решения, определять функционалы в обратных задачах и др. Эти возможности иллюстрируются на примере ряда уравнений математической физики.

В частности, для уравнения эйконала $\tau_x^2 + \tau_y^2 = n^2(x,y)$ ($\tau = \tau(t,x,y)$ — поле времен, t — параметр точечного источника, $n(x,y) = 1/c(x,y)$, $c(x,y)$ — скорость распространения волн) из основного тождества получено новое (по сравнению с 1-м уравнением Френе для луча) соотношение между функциями τ и $n(x,y)$ (векторами $\operatorname{grad}\tau$ и $\operatorname{grad}\ln n(x,y)$), содержащее величину $\operatorname{arctg}(\tau_y/\tau_x) = \operatorname{arctg}(y_\tau/x_\tau) = \operatorname{arctg}(dy/dx)$, где $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, $y = y(x)$ — уравнения луча. Из тождества (1) следует тождество

$$\operatorname{div}\bar{Q} = \operatorname{div}\left\{\frac{\Delta\tau}{n^2(x,y)}\ \operatorname{grad}\tau\right\} = \Delta\ln n(x,y),$$

показывающее, что, хотя τ зависит от t (положения источника), величина $\operatorname{div}\bar{Q}$ и поток $\int_S(\bar{Q}\cdot\bar{\nu})\,ds$ ($\bar{\nu}$ — нормаль к S) вектора $\bar{Q}$ через любую фиксированную границу S не зависят от него. Из других найденных общих тождеств 2-го и 3-го порядка получены другие тождества, связывающие функции $n(x,y)$ и τ. Получен ряд интегральных формул для определения некоторых функционалов в обратной кинематической задаче сейсмики (геометрической оптики).

Для уравнения Монжа — Ампера получено его преобразование к ряду новых эквивалентных форм. Одни из этих форм являются дивергентными, другие имеют 1-ый (более низкий) порядок и др.