

## Об одной задаче оптической томографии

И.В. Прохоров

ИПМ ДВО РАН, ул. Радио, 7, 690041, Владивосток, Россия, E-mail: prh@iam.dvo.ru

Работа поддержана грантом НШ-9004.2006.1 конкурса ведущих научных школ РФ и грантом 06-ИИ-СУ-01-001 конкурса интеграционных проектов ДВО РАН с научными учреждениями СО и УрО РАН

Пусть  $G$  выпуклая ограниченная область в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Обозначим через  $G_i, i = 1, \dots, p$  попарно непересекающиеся области такие, что:  $G_0 = G_1 \cup G_2 \dots \cup G_p \subset G$  и  $\overline{G}_0 = \overline{G}$ . Границу  $G$  ( $\partial G = \overline{G} \setminus G$ ) будем называть внешней границей  $G_0$ , а множество  $\partial G_0 \setminus \partial G$ , представляющее собой объединение границ разделов областей  $G_i$ , будем обозначать через  $\gamma$  и называть внутренней границей множества  $G_0$ . Области  $G_i$  можно интерпретировать как неоднородности или включения, входящие в состав многокомпонентной среды  $G$ , где происходит процесс распространения излучения. Поверхность  $\partial G_0$  предполагается гладкой класса  $C^2$ . Если  $z \in \partial G$ , то через  $n(z)$  будем обозначать единичный вектор внешней нормали в точке  $z$ , если же  $z \in \gamma$  и лежит на границе контакта двух областей  $G_i, G_j, i < j$ , то нормаль  $n(z)$  выбирается внешней к поверхности  $\partial G_j$  (с большим индексом). Пусть  $\Omega$  единичная сфера в  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$ , а  $\Omega_{\pm}(z)$  — полусферы,  $\Omega_{\pm}(z) = \{\omega \in \Omega : \text{sgn}(\omega \cdot n(z)) = \pm 1\}$ , и пусть  $\Gamma^{\pm} = \partial G \times \Omega_{\pm}(z)$ . Для всех  $(z, \omega) \in (\gamma \times \Omega) \cup \Gamma^{\pm}$  будем использовать обозначения  $f^{\pm}(z, \omega) = f(z \mp 0\omega, \omega)$ , где  $f(z \pm 0\omega, \omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(z \pm \varepsilon\omega, \omega)$  предельные значения функции  $f(r, \omega)$  при соответствующем стремлении точки  $r$  к  $z$ , принадлежащей границе множества  $G_0$ .

**Прямая задача.** Требуется определить функцию  $f(r, \omega)$ ,  $(r, \omega) \in G_0 \times \Omega$ , из уравнения

$$\omega \cdot \nabla_r f(r, \omega) + \mu(r)f(r, \omega) = \mu_s(r) \int_{\Omega} g(r, \omega \cdot \omega') f(r, \omega') d\omega' + J(r, \omega), \quad (1)$$

граничного условия

$$f^-(z, \omega) = h(z, \omega), \quad (z, \omega) \in \Gamma^-, \quad (2)$$

и условия сопряжения

$$f^-(z, \omega) = (\hat{B}f^+)(z, \omega), \quad (z, \omega) \in \gamma \times \Omega. \quad (3)$$

Уравнение (1) часто называют уравнением переноса излучения или линейным уравнением Больцмана. Функция  $f(r, \omega)$  интерпретируется как плотность потока частиц в точке  $r$ , летящих в направлении  $\omega$ . Величины  $\mu, \mu_s, g$  и  $J$  называются коэффициентом ослабления, коэффициентом рассеяния, индикатрисой рассеяния и плотностью внутренних источников, соответственно. Функция  $h$  описывает поступающее через поверхность  $\partial G$  в среду  $G$  излучение, а оператор сопряжения  $\hat{B}$  моделирует перенос излучения через границы раздела сред  $\gamma$ . Данная модель учитывает не только рассеяние света на микро-неоднородностях среды, но и отражение и преломление на границах крупных включений, что позволяет применять эту модель для описания распространения излучения видимого диапазона в мутных средах.

**Обратная задача.** Найти поверхность  $\gamma$  из уравнения (1), соотношений (2),(3) и дополнительного условия

$$f^+(z, \omega) = H(z, \omega), \quad (z, \omega) \in \Gamma^+, \quad (4)$$

если известны только внешняя граница области  $G$  и функция  $H$ .

Эту задачу можно отнести к проблеме оптической томографии, в которой требуется определить границы раздела сред по заданному излучению  $H$ , выходящему из среды  $G$  [1,2].

Относительно функций, входящих в уравнение (1), предполагается, что:  $\mu(r), \mu_s(r) \in C_b(G_0)$ ,  $J(r, \omega) \in C_b(G_0 \times \Omega)$ , где  $C_b(X)$  — пространство ограниченных и непрерывных на множестве  $X$  функций с нормой  $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ . Пусть  $\mu_s \geq 0$  на  $G_0$ , а  $\mu$  удовлетворяет неравенству:  $0 < \underline{\mu} \leq \mu(r) \leq \bar{\mu}$ , где  $\underline{\mu}, \bar{\mu} = \text{const}$ . Функция  $g$  — неотрицательная, ограниченная и непрерывная на  $G_0 \times [-1, 1]$ , и удовлетворяет условию нормировки  $\int_{\Omega} g(r, \omega \cdot \omega') d\omega' = 1$ . Будем предполагать, что функция  $h(z, \omega)$  в условии (2) принадлежит  $C_b(\Gamma^-)$  и неотрицательная, а оператор  $\hat{B}$  в условии сопряжения (3) является линейной комбинацией операторов сопряжения френелевского типа  $\hat{B}_{fr}$  и диффузного  $\hat{B}_d$ , то есть

$$(\hat{B}\phi)(z, \omega) = \beta_{fr}(z, \omega)(\hat{B}_{fr}\phi)(z, \omega) + \beta_d(z, \omega)(\hat{B}_d\phi)(z, \omega). \quad (5)$$

В соотношении (5) оператор  $\hat{B}_{fr}$  задается формулой [3]:

$$(\hat{B}_{fr}f^+)(z, \omega) = R(z, \nu)f^+(z, \omega_R) + T(z, \nu)f^+(z, \omega_T). \quad (6)$$

Здесь

$$\omega_R = \omega - 2\nu n, \quad \omega_T = \psi(z, \nu)n + \tilde{\kappa}(z, \nu)(\omega - \nu n), \quad \nu = \omega \cdot n(z), \quad (7)$$

$$\tilde{\kappa}(z, \nu) = \begin{cases} \kappa_i/\kappa_j, & \text{если } z \in \partial G_i \cap \partial G_j, \quad 0 < \nu(z) \leq 1, \\ \kappa_j/\kappa_i, & \text{если } z \in \partial G_i \cap \partial G_j, \quad -1 \leq \nu(z) < 0, \end{cases}$$

$$\psi(z, \nu) = \begin{cases} \text{sgn}(\nu)\sqrt{1 - \tilde{\kappa}^2(z, \nu)(1 - \nu^2)}, & \text{если } 1 - \tilde{\kappa}^2(z, \nu)(1 - \nu^2) \geq 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (8)$$

$$R(z, \nu) = \frac{1}{2}(R_{\parallel}^2(z, \nu) + R_{\perp}^2(z, \nu)), \quad T(z, \nu) = \frac{1}{2}(T_{\parallel}^2(z, \nu) + T_{\perp}^2(z, \nu)) \frac{\tilde{\kappa}(z, \nu)\nu}{\psi(z, \nu)}, \quad (9)$$

где константы  $\kappa_i$  обозначают показатели преломления сред  $G_i$  и

$$R_{\parallel}(z, \nu) = \frac{\tilde{\kappa}(z, \nu)\psi(z, \nu) - \nu}{\tilde{\kappa}(z, \nu)\psi(z, \nu) + \nu}, \quad R_{\perp}(z, \nu) = \frac{\psi(z, \nu) - \tilde{\kappa}(z, \nu)\nu}{\psi(z, \nu) + \tilde{\kappa}(z, \nu)\nu}, \quad (10)$$

$$T_{\parallel}(z, \nu) = \frac{2\psi(z, \nu)}{\tilde{\kappa}(z, \nu)\psi(z, \nu) + \nu}, \quad T_{\perp}(z, \nu) = \frac{2\psi(z, \nu)}{\psi(z, \nu) + \tilde{\kappa}(z, \nu)\nu}. \quad (11)$$

Вектора  $\omega_R$  (или  $\omega_T$ ) характеризуют направление потока излучения падающего на поверхность  $\partial G_j$  и в результате зеркального отражения (или соответственно преломления по закону Снеллиуса меняющего свое направление на  $\omega$ . Коэффициенты  $R$  и  $T$  в (6) характеризуют отражательную и пропускательную способность границы раздела сред  $G_i$  и  $G_j$  при френелевском отражении (преломлении) для неполяризованного излучения.

Оператор  $\hat{B}_d$  в (5), описывающий диффузное отражение, имеет вид

$$(\hat{B}_d\phi)(z, \omega) = \int_{\Omega} g_d(z, \omega, \omega')\phi(z, \omega')d\omega', \quad (12)$$

где функция  $g_d(z, \omega, \omega')$ , называемая индикатрисой отражения, ограничена и непрерывна на  $\gamma \times \Omega \times \Omega$  и для всех  $(z, \omega) \in \gamma \times \Omega$  удовлетворяет точно такому же условию нормировки, что и функция  $g$ . Функции  $\beta_{fr}, \beta_d \in C_b(\gamma \times \Omega)$ ,  $(\beta_{fr}(z, \omega), \beta_d(z, \omega) \geq 0, \beta_{fr}(z, \omega) + \beta_d(z, \omega) \leq 1)$  определяют френелевскую и диффузную составляющую в отраженном свете.

Пусть лучи  $L_{r, \omega} = \{r + \omega t : t > 0\}$  и  $L_{r, -\omega} = \{r - \omega t : t > 0\}$  при любых  $(r, \omega) \in G_0 \times \Omega$  пересекают  $\partial G_0$  в конечном числе точек  $z_i(r, \omega) = r + t_i(r, \omega)\omega$ ,  $i = 1, \dots, q(r, \omega)$ , и  $z_i(r, -\omega) = r - t_i(r, -\omega)\omega$ ,  $i = 1, \dots, q(r, -\omega)$ , соответственно. Для краткости через  $d(r, \omega)$  будем обозначать расстояние от точки  $r$  до внешней границы  $\partial G$  в направлении  $\omega$ , то есть  $d(r, \omega) = t_{q(r, \omega)}(r, \omega)$ .

Введем обозначения:  $[f]_{\omega'}(r, \omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (f(r + \varepsilon\omega', \omega) - f(r - \varepsilon\omega', \omega)) = f(r + 0\omega', \omega) - f(r - 0\omega', \omega)$ , Величина  $[f]_{\omega'}(r, \omega)$  представляет собой величину разрыва функции  $f$  в точке  $(r, \omega)$  по переменной  $r$  и в направлении  $\omega'$ .

Пусть  $\Omega_1(r)$ ,  $r \in G_0$  открытое подмножество единичной сферы, такое, что функция  $t_1(r, -\omega)$  непрерывна на  $G_0 \times \Omega_1(r)$ ; множество  $\Omega_1^+(z)$ ,  $z \in \partial G_0$  состоит из элементов  $\omega \in \Omega_1(r)$  для которых существует  $r \in G_0$  и справедливо представление  $z = r + t_1(r, \omega)\omega$ , причем функция  $t_1(r, \omega) : G_0 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывна в точке  $(r, \omega)$ . При сформулированных выше ограничениях на гладкость  $\partial G_0$ , из [1] следует, что функция  $t_1(r, \pm\omega)$  непрерывна для всех  $(r, \omega) \in G_0 \times \Omega$  таких, что отрезок  $\{r \pm t\omega, 0 \leq t \leq t_1(r, \pm\omega)\}$  не является касательным к поверхности  $\partial G_0$  в точке  $r \pm t_1(r, \pm\omega)\omega$ . Имея ввиду выше сказанное, мы можем дать конструктивное определение множеств  $\Omega_1(r)$   $\Omega_1^+(r)$ . С этой целью положим:

$$\begin{aligned}\Omega_1(r) &= \{\omega \in \Omega : n(z) \cdot \omega \neq 0, \text{ где } z = r - t_1(r, -\omega)\omega\}, \\ \Omega_1^+(z) &= \{\omega \in \Omega_1(r) : \text{ где } r \in G_0, z = r + t_1(r, \omega)\omega(z), n(z) \cdot \omega \neq 0\}.\end{aligned}\quad (13)$$

Учитывая определение  $\Omega_1(r)$ , построим следующую цепочку множеств для  $i = 1, 2, \dots$ :

$$\Omega_i^+(z) = \{\omega \in \Omega_i(r) : r \in G_0, z = r + t_1(r, \omega)\omega, n(z) \cdot \omega \neq 0\}, \quad z \in \gamma, \quad (14)$$

$$\begin{aligned}\Omega_i^-(z) &= \{\omega \in \Omega : \omega_R(z, \omega) \in \Omega_i^+(z) \text{ при условии } \beta_{fr}(z, \omega) \neq 0, \\ &\quad \omega_T(z, \omega) \in \Omega_i^+(z) \text{ при условиях } \beta_{fr}(z, \omega), T(z, \omega) \neq 0\}, \quad z \in \gamma, \quad (15)\end{aligned}$$

$$\Omega_{i+1}(r) = \{\omega \in \Omega_i(r) : \omega_R(z, \omega), \omega_T(z, \omega) \in \Omega_i^-(z), z = r - t_1(r, -\omega)\omega\}, r \in G_0. \quad (16)$$

Нетрудно заметить, что для всех  $r \in G_0$  имеют место включения  $\Omega_1(r) \supseteq \Omega_2(r) \supseteq \Omega_3(r) \dots$ . Из определения функции расстояния вытекает, что  $t_1(r, -\omega)$ , имеющая ненулевой разрыв  $[t_1]_{\omega'}$  в некоторой точке  $(r^*, \omega^*)$ , ( $\omega^* \neq \omega'$ ), имеет его и для всех  $(r', \omega^*)$  таких, что  $r'$  лежит на луче  $L_{r^*, -\omega^*}$ . Поэтому  $G \times \Omega_2(r)$  представляет собой множество непрерывности функции  $t_1(r, -\omega)$ , в котором помимо точек ее разрыва, удалены также такие точки  $(r', \omega'')$ , что  $r'$  лежит на лучах  $L_{r, \omega''}$ , образованных в результате "зеркального отражения и преломления по закону Снеллиуса разрывов от поверхности раздела сред". Множество  $G \times \Omega_3(r)$  получается из  $G \times \Omega_1(r)$ , удалением точек, которые появляются в результате "однократных и двукратных переотражений" разрывов функции расстояния  $t_1$ .

Пусть  $\Omega_0(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n(r)$  и будем предполагать, что  $\Omega_0(r)$  также открытое множество, и  $\bar{\Omega}_0(r) = \Omega$ ,  $\text{mes}_2(\partial\Omega_0(r)) = 0$ , где через символ  $\text{mes}_n$  обозначена мера Лебега в  $\mathbb{R}^n$ . Определим множество  $D(G_0 \times \Omega_0(r))$  в котором ищется решение прямой задачи.

**Определение 1.** Будем говорить, что функция  $f(r, \omega) \in D(G_0 \times \Omega_0(r))$  если: при любых  $(r, \omega) \in G_0 \times \Omega_0(r)$  функция  $f(r + t\omega, \omega)$  абсолютно непрерывна по переменной  $t$ ,  $t \in (-t_1(r, -\omega), t_1(r, \omega)]$  и функции  $f$ ,  $\omega \cdot \nabla_r f \in C_b(G_0 \times \Omega_0(r))$ .

Имеет место

**Теорема 1.** Пусть оператор сопряжения  $\hat{B}$  определяется соотношением (5), и  $\beta_{fr}(z, \omega) + \beta_d(z, \omega) \leq \text{const} < 1$ , тогда прямая задача (1), (2), (3) имеет единственное решение  $f \in D(G_0 \times \Omega_0)$ .

Перейдем к решению обратной задачи и рассмотрим случай когда разбиение области  $G$ , состоит из двух областей  $G_1$  и  $G_2$  ( $G_0 = G_1 \cup G_2$ ), причем  $G_1$  — строго выпуклая область с гладкой границей и  $\bar{G}_1 \subset G$ .

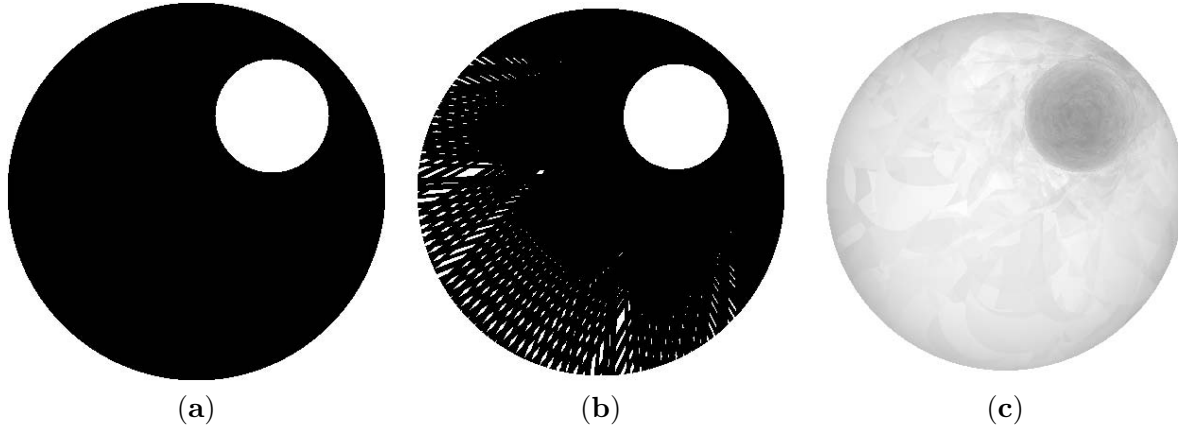
**Теорема 2.** Пусть имеется два комплекта функций и операторов  $\{\mu^{(i)}, \mu_s^{(i)}, g^{(i)}, J^{(i)}, h^{(i)}, \hat{B}^{(i)}\}$ ,  $i = 1, 2$ . Каждому из них соответствуют два решения  $f^{(1)}(r, \omega), f^{(2)}(r, \omega)$  прямой задачи (1)-(3) для первого и второго комплекта соответственно и одной и той же поверхности  $\partial G$ . Оператор сопряжения имеет вид (5), причем  $0 < \beta_{fr}^{(i)}(z, \omega) < 1$  для всех  $(z, \omega) \in \gamma^{(i)} \times \Omega$ ,  $\beta_d^{(i)}(z, \omega) \rightarrow 0$  при  $n(z) \cdot \omega \rightarrow 0$ . Функции  $h^{(i)}$  — положительные. Если  $f^{(1)}(r + d(r, \omega)\omega, \omega) = f^{(2)}(r + d(r, \omega)\omega, \omega)$  при всех  $\omega = (\omega_1, \omega_2, 0) \in \Omega$  и любом  $r \in G_0^{(1)} \cap G_0^{(2)} \cap \mathcal{P} = \{r_3 = \text{const}\}$ , тогда  $\gamma^{(1)} = \gamma^{(2)}$  в плоскости  $\mathcal{P}$ .

Теорема 2 содержит достаточные условия на оператор сопряжения, гарантирующие единственность решения обратной задачи. Единственность имеет место и при более слабых ограничениях на исходные данные задачи. Однако, эти ограничения очень громоздки и их труднее проверить практически.

Рассмотрим два тестовых примера отражающих специфику работы предлагаемого метода решения обратной задачи. Все тестовые примеры проводились в два этапа. На первом этапе по заданным характеристикам среды и источникам излучения, методом Монте-Карло, находилось выходящее из среды излучение  $H(z, \omega)$ . На втором этапе по заданной функции  $H(z, \omega)$  находилась реконструкция области  $G$  в сечении  $r_z = 0$ . При построении модельных данных предполагалось, что оператор сопряжения имеет вид  $\hat{B} = 0.9\hat{B}_{fr}$  и моделирует преломление и отражение по законам Френеля с небольшим поглощением на границе. Рассеяние в среде предполагалось изотропным, источник внешнего излучения слабоколлимированным, а внутренние источники отсутствовали.

Результаты восстановления внутренней структуры области  $G$  в сечении  $r_z = 0$  представлены в графической форме в виде томограмм (см. рис. 1). Алгоритм построения томограмм выглядел следующим образом. Сечение области  $G$  плоскостью  $r_z = 0$  покрывается равномерной сеткой  $\{r_{ij} = (r_{1i}, r_{2j}, 0), i, j = 1, \dots, 400\}$ . В каждом из узлов сетки  $r_{ij}$ , для всевозможных направлений, вычисляется функция  $[H]_{\omega_{\perp}}(r_{ij} + d(r_{ij}, \omega)\omega, \omega)$  – величина разрыва функции  $H$  в направлении  $\omega_{\perp}$ , перпендикулярном к  $\omega$ . Если для какого-то направления оказывается, что  $|[H]_{\omega_{\perp}}(r_{ij} + d(r_{ij}, \omega)\omega, \omega)| > \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  достаточно малое положительное число, то в этой точке полагается  $\text{Ind}(r_{ij}) = 1$ , иначе  $\text{Ind}(r_{ij}) = 0$ . Значения сеточной функции  $\text{Ind}(r_{ij})$  отображаются на экране в виде цветовой диаграммы.

**Тест 1.** Будем считать, что область  $G$  представляет собой шар единичного радиуса с центром в начале координат. Разбиение  $G_0$  состоит из двух областей:  $G_1$  — представляет собой шар радиуса 0.3 с центром в точке  $(0.4, 0.4, 0)$  и  $G_2 = G \setminus \overline{G_1}$ . Соответствующие коэффициенты уравнения переноса имеют вид:  $\mu(r) = 1.3; 1$ ,  $\mu_s(r) = 1.2; 0.9$ ,  $\kappa(r) = 1.2; 1$  при  $r \in G_1; G_2$ , соответственно.



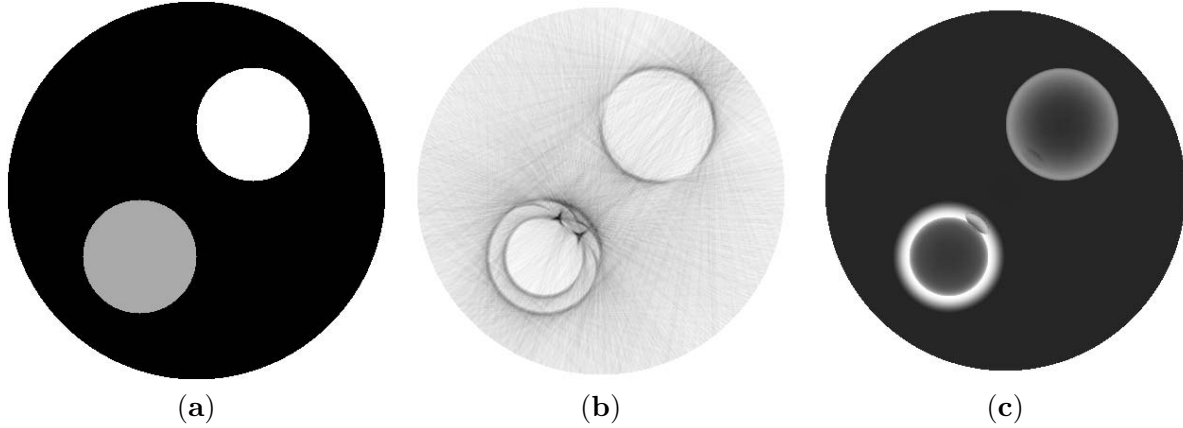
**Рис. 1:** На рисунке для первого тестового примера приведены соответственно, оригинал сечения, его томограмма и визуализация области  $G_1$  в перпендикулярном к сечению направлении.

На рис. 1а-с приведены, соответственно, оригинал сечения, его восстановление предложенным методом и визуализация области  $G_1$  в направлении  $\omega_0 = (0, 0, -1)$  на экране, представляющем собой часть плоскости  $r_z = -0.35$ . Визуализация, приведенная на рис. 1с демонстрирует, что применение предложенного метода, порой (большая оптическая плотность, сильное рассеяние) дает лучшие результаты, чем просто изображение, снятое на прямой видимости. Таким образом, наблюдается достаточно хорошее согласование между теорией и численным экспериментом.

В случае двух и более включений предложенный метод, вообще говоря, не обязан работать. В частности, это связано с тем, что для точек внутри любого из включений всегда найдутся направления касательные к другому включению, которые будут давать разрыв решения на границе. Однако, для точек внутри включения, количество таких направлений будет меньше чем во внешности. В связи с этим возможна дальнейшая модификация метода, заключающаяся в том, чтобы при построении

сеточной функции  $\text{Ind}(r_{ij})$  присваивать ей значения, соответствующие количеству направлений, для которых выполняется условие  $|[H]_{\omega_{\perp}}(r_{ij} + d(r_{ij}, \omega)\omega, \omega)| > \varepsilon$ . При последующем отображении функции  $\text{Ind}(r_{ij})$  на цветовой диаграмме включения должны отличаться по цвету от внешности. Для проверки данного предположения был проведен следующий численный эксперимент.

**Тест 2.** Предполагалось, что область  $G$  представляет собой шар единичного радиуса с центром в начале координат. Разбиение  $G_0$  состоит из трех областей:  $G_1, G_2$  — представляют собой шары радиуса 0.3 с центрами в точках  $(\pm 0.4, \pm 0.4, 0)$ , а  $G_3 = G \setminus (\overline{G_1} \cup \overline{G_2})$ . Коэффициенты имеют вид:  $\mu(r) = 0.5; 0.2; 0.1$ ,  $\mu_s(r) = 0.4; 0.19; 0.09$ ,  $\kappa(r) = 1.6; 1; 1.4$  при  $r \in G_1; G_2; G_3$ , соответственно.



**Рис. 2:** На рисунке для второго тестового примера приведены соответственно, оригинал сечения, его томограмма и визуализация областей  $G_1, G_2$  в перпендикулярном к сечению направлении.

На рис. 2а-с приведены, соответственно, оригинал сечения, его восстановление, а также визуализация областей  $G_1, G_2$  в направлении  $\omega_0 = (0, 0, -1)$  на экране, представляющем собой часть плоскости  $r_3 = -0.35$ . Прокомментируем результаты проведенного эксперимента. Как видно из рис. 2б, на томограмме проявились оба включения, при этом границы данных включений оказались выделенными темным цветом. Данное обстоятельство, скорее всего, связано с тем, что для точек  $r_{i,j}$ , находящихся возле границ включений, существует достаточно много направлений близких к касательным для указанных поверхностей, что сказывается на значениях функции  $\text{Ind}(r_{ij})$ . При восстановлении включения  $G_2$  проявился "артефакт" в виде дополнительной границы, выделенной темным цветом. Отметим, что подобная ситуация проявляется и на визуализации области  $G$  (см. рис. 2с). Такая картина, вероятно, связана с тем, что для определенных значений  $\omega$ , происходит полное внутреннее отражение потока излучения, при падении его из области  $G_3$  на границу раздела с областью  $G_2$ . При этом, по мере приближения величины  $\nu = \omega \cdot n(z)$  к косинусу угла полного внутреннего отражения, решение уравнения переноса меняется очень быстро, так что для вычисления скачков  $[H]_{\omega_{\perp}}(r_{ij} + d(r_{ij}, \omega)\omega, \omega)$  в таких направлениях требуется очень подробная сетка.

## Литература

1. D.S. Anikonov, A.E. Kovtanyuk, and I.V. Prokhorov, *Transport Equation and Tomography*, VSP, Utrecht-Boston, 2002.
2. И.В. Прохоров, "Определение поверхности раздела сред по данным томографического просвечивания". *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **42**:10, (2002), 1542-1555.
3. И.В. Прохоров, "О разрешимости краевой задачи для уравнения переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела сред", *Известия РАН. Серия математическая*, **67**:6, (2003), 169-192.