Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Об одном оптимальном по порядку методе решения некорректных задач

Т.Н. Рудакова[***]

[*] ЮУрГУ,
пр. Ленина, 76,
454080 Челябинск, Россия
E-mail: rtn@math.susu.ac.ru

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство.
$A\colon\ H \to H$ — линейный непрерывный самосопряженный оператор, вообще говоря, неинъективный неотрицательный с незамктнутой областью значений. Рассматривается операторное уравнение первого рода:

$$Au = f, \quad u, f \in H \tag{1}$$

Правая часть уравнения (1) и оператор A считаются заданными приближенно. Вместо точных значений заданы: $f_\delta \in H \quad (\|f - f_\delta\| \le \delta)$ и оператор $A_h : H \to H$ - линейный ограниченный самосопряженный ($\|A - A_h\| \le h.$). Уровни погрешностей $\delta,\ h$ считаем известными. Предполагается, что точное решение уравнения (1) существует и принадлежит ограниченному множеству

$M_r = BS_r, \quad S_r = \{v \in H\colon\ \|v\| \le r\},$

где B - линейный непрерывный самосопряженный оператор. Сужение оператора B на ортогональное дополнение L к ядру оператора A есть функция оператора A: $B|_L = g(A)$, где g - известная действительная непрерывная строг возрастающая функция, $g(0) = 0$.
Требуется найти нормальное (то есть минимальной нормы) решение уравнения (1), используя приближенные данные $\{A_h, f_\delta, h, \delta.\}$
Приближение к нормальному решению $u_0 \in M_r \bigcap L$ уравнения (1) будем искать в виде:

$$u^\alpha_{\delta h} = \widehat{R}_\alpha[A_h] f_\delta = B_h (C_h^2 + \alpha E)^{-1} C_h f_\delta, \quad B_h = g(A_h), \quad C_h = A_h B_h. \tag{2}$$

Погрешность регуляризованного решения:

$$\Delta(\widehat{R}_\alpha) = \sup_{u, A_h, f_\delta} \{\|u^\alpha_{\delta h} - u\|\colon \quad u \in M_r \bigcap L, \\ \|A_h - A\| \le h, \quad \|f_\delta - Au\| \le \delta\}. \tag{3}$$

Получены точные по порядку оценки погрешности метода (2) для задач с неединственным решением, доказывающие его оптимальность по порядку на различных классах равномерной регуляризации.