Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

О разрешимости задачи Коши для операторов с инъективным символом в пространствах Соболева

И.В. Шестаков*, **А.А. Шлапунов****

* ИЕиГН СФУ,
пр. Свободный, 79,
660041 Красноярск, Россия
E-mail: Shestakov-V@yandex.ru

** ИЕиГН СФУ,
пр. Свободный, 79,
660041 Красноярск, Россия
E-mail: aashlapuno@mail.ru

Работа первого автора была поддержана ККФН (грант 17G102),
работа второго автора была поддержана РФФИ (грант 05-01-00517)

Как хорошо известно, эллиптические операторы играют важную роль в теоретической физике. В связи с этим особенно интересны краевые задачи для таких операторов и ассоциированных с ними лапласианов (см., например, [1], [2]). Например, задача Коши для системы Коши-Римана – типичной эллитической системы – появляется в гидродинамике, в теории передачи сигнала и т.д. Как оказалось, только краевые задачи с очень специальными граничными условиями являются корректными для эллиптических операторов. Поэтому особенно актуальным стало изучение некорректных краевых задач для них.

Типичный пример некорректной краевой зачачи дает задача Коши. Фундаментальное исследование задачи Коши для однородных (т.е. с нулевой правой частью) эллиптических систем проведено в [3]. Мы рассматриваем, вообще говоря, переопределенные эллиптические операторы, что не позволяет свести неоднородную задачу к однородной, по крайней мере, без дополнительных предположений относительно геометрических свойств области, где ищется решение.

Поскольку модельным примером таких операторов можно считать оператор Коши-Римана, то уместно отметить, что именно методы, разработанные для изучения задачи Коши для голоморфных функций (см. [4]) и применяются нами. Обобщая идеи [3], [4], мы сводим задачу Коши для эллиптического оператора к задаче гармонического продолжения из меньшей области в большую. Мы не только получаем условия разрешимости задачи, но строим ее регуляризацию (т.е. точное и приближенные решения). Подчеркнем, что на границу области, где ищется решение, мы не накладываем никаких геометрических условий, кроме связности.

Пусть X – открытое множество в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ и A_0 – $(l \times k)$ матричный дифференциальный оператор порядка $m \geq 1$ с гладкими коэффициентами на X. Мы предположим, что главный символ оператора A_0 инъективен, т.е. что A_0 – (возможно переопределенный) эллиптический оператор.

Пусть D – ограниченная область в X с гладкой границей ∂D. Зафиксируем систему Дирихле порядка $m-1$ в окрестности ∂D в X (см., например, [8]) и открытое связное множество $\Gamma \subset \partial D$. Рассмотрим следующую задачу Коши.

Задача 1 *Пусть $s \geq 0$. По заданной векторной функциии f из пространства Соболева $\left[H^s(D)\right]^l$ и набору $\{u_j\}_{j=0}^{m-1}$ векторных функций из пространств Соболева $\left[H^{s+m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right]^k$ соответственно найти функцию $u \in \left[H^{s+m}(D)\right]^k$ такую, что*

$$A_0 u = f \text{ в } D, \tag{1}$$

$$B_j u = u_j \text{ на } \Gamma, \quad 1 \leq j \leq m-1. \tag{2}$$

Предположим, что оператор A_0 можно включить в эллиптический дифференциальный комплекс $\{A_i\}$ на X (см. [6]). Например, это возможно, когда коэффициенты оператора A вещественно аналитичны на X.

Тогда условие $A_1 f = 0$ необходимо для разрешимости задачи Коши ($A_1 - (l_1 \times l)$ матричный дифференциальный оператор совместности).

Пусть обобщенный лапласиан A^*A и блочный оператор $A^* \oplus A_1$ удовлетворяют так называемому условию единственности в малом на X (здесь A^* – форамально сопряженный к A дифференциальный оператор).

Свойство единственности в малом на X для оператора A: *Если для области $D \subset X$ мы имеем $Au = 0$ в D, а $u = 0$ на некотором непустом открытом подмножестве $\Omega \subset D$, то $u = 0$ в D.*

Например, это условие выполнено, если коэффициенты оператора A вещественно аналитичны на X. Условие единственности, в частности, влечет, что оператор $\Delta = A^*A$ имеет двустороннее фундаментальное решение, скажем Φ, на X. Тогда $L(x, y) = (A^*)'_y \Phi(x, y)$ – левое фундаментальное решение оператора A.

Напомним, что дифференциальный оператор $G_A(.,.) : [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^l \times [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k \to C^\infty(\Lambda^{n-1}, \mathbb{R}^n)$ называется оператором Грина для оператора A, если

$$dG_A(g, v) = [g^T(x)(Av)(x) - (A^T g)^T(x) v(x)]\, dx$$

для всех $g \in [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^l$, $v \in [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k$, $C^\infty(\Lambda^{n-1}, \mathbb{R}^n)$ — множество дифференциальных форм степени $(n - 1)$ с гладкими коэффициентами в $\mathbb{R}^n$.

Предположим, что граница ∂D не является характеристической для опреатора A. Тогда по заданной системе Дирихле $\{B_j\}_{j=1}^{m-1}$ в окрестности границы ∂D оператор грина можно представить в виде

$$G_A(g, v) = \sum_{j=0}^{m-1} < C_j g, B_j v > dS + \frac{d\rho}{|d\rho|} \wedge G_\nu(g, v),$$

где ρ – какая-нибудь определяющая функция области D, $\{C_j\}_{j=1}^{m-1}$ есть система Дирихле порядка $(m-1)$ на ∂D такая, что $C_j : [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^l \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – дифференциальные операторы порядка $(m - b_j - 1)$, $(0 \le j \le m - 1)$, а $G_\nu : [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^l \times [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k \to C^\infty(\Lambda^{n-2}, \mathbb{R}^n)$ – дифференциальный оператор порядка $(m - 1)$ (см., например, [7]).

Для всякого $0 \le j \le m-1$ зафиксируем какие-нибудь вектора $\tilde{u}_j \in \left[H^{s+m-j-\frac{1}{2}}(\partial D)\right]^k$, совпадающие с u_j на Γ. Положим

$$(M(\oplus \tilde{u}_j))(x) = -\int_{\partial D} G_A(L(x, \cdot), \oplus \tilde{u}_j), \qquad (T_D f)(x) = \int_D L'(x, y) f(y)\, dy.$$

В частности, из свойств фундаментального решения следует, что $A^*AM(\oplus \tilde{u}_j) = 0$ в $X \setminus \partial D$, $A^*AT_D f = 0$ in $X \setminus D$. Из теорем об ограниченности псевдодифференциальных операторов в пространствах Соболева следует, что $(T_D f), (M(\oplus \tilde{u}_j)) \in \left[H^{s+m}(D)\right]^k$, и даже $(T_D f), (M(\oplus \tilde{u}_j)) \in \left[H^{s+m}(X \setminus D)\right]^k$, если X - ограниченная область.

Выберем область $D^+ \subset \mathbb{R}^n$ так, чтобы множество $\Omega = D \cup \Gamma \cup D^+$ было ограниченной областью в $X \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей.

Теорема 1 *Задача Коши разрешима тогда и только тогда, когда*

1)$\int_\Gamma G_A(A_1^T \beta, \oplus u_j)\, dS = \int_D (A_1^T \beta)^T f\, dx$ для любого бесконечно гладкого $\beta \in [C^\infty(D \cup \Gamma)]^{l_1}$ с компактным носителем в $D \cup \Gamma$.

2) Функция $F^+ = (M_\Gamma(\oplus \tilde{u}_j) + T_D f)_{|D^+}$ продолжается из D^+ на Ω как решение оператора A^*A из класса $\left[H^{s+m}(D)\right]^k$.

Напомним определение базисов со свойством двойной ортогональности (см. [3]). С этой целью обозначим через $h^s(\Omega)$ пространство функций, являющихся решениями оператора A^*A в Ω и принадлежащих $[H^s(\Omega)]^k$.

Лемма 1 (Шлапунов А., Тарханов Н. [3].) *Если $\omega \subset\subset D^+ \subset \Omega$ — открытое множество с кусочно-гладкой границей, дополнение которого не имеет компактных связных компонент в Ω, то в пространстве $h^s(\Omega)$ найдется такой ортонормированный базис $\{b_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, сужение которого на ω является ортогональным базисом в $h^s(\omega)$.*

Примеры таких базисов приведены, например, в [3].

Как мы видели выше, $F^+ = F_{|D^+} \in h^{s+m}(\omega)$. Обозначим через $k_\nu(F^+) = \frac{\left(F, b_\nu\right)_{[H^{s+m}(\omega)]^k}}{\|b_\nu\|^2_{[H^{s+m}(\omega)]^k}}$, $\nu = 1, 2, ...$ коэффициенты Фурье функции $F^+ \in h^{s+m}(\omega)$ по ортогональной системе $\{b_{\nu|\omega}\}$ в $h^{s+m}(\omega)$.

Теорема 2 *Если граница области D достаточно гладкая, то задача Коши разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие 1) из теоремы 1 и сходится ряд $\sum_{\nu=1}^\infty \left|k_\nu(F^+)\right|^2$.*

Из свойств фундаментального решения следует, что $(A^*A)_x L(x,y) = 0$ для $x \neq y$. Введем в рассмотрение следующие ядра Карлемана $\mathfrak{C}^{(N)}$, определенные для $(x,y) \in \Omega \times X$ $(x \neq y)$:

$$\mathfrak{C}^{(N)}(x,y) = L(x,y) - \sum_{\nu=1}^{N} b_\nu(x) \otimes k_\nu(L(\cdot, y)),\ N = 1, 2, ...$$

Теорема 3 *Для всякой функции $u \in [H^{s+m}(D)]^k$, справедлива формула Карлемана:*

$$u(x) = \lim_{N \to +\infty} \left(- \int_{\partial D} G_A \big(\mathfrak{C}^{(N)}(x, \cdot), \oplus \tilde{u}_j(y)\big)^T dS + \int_D (\mathfrak{C}^{(N)}(x, \cdot)) Au(y)\, dy \right), \tag{3}$$

где $\tilde{u}_j \in [H^{s+m-j-\frac{1}{2}}(\partial D)]^k$ — какие-нибудь функции, совпадающие с $B_j u$ на Γ.

Список литературы

[1] Боголюбов Н.Н., Широков Д.В. Введение в теорию квантовых полей. - М.: Наука, 1984. - 600 с.

[2] Booß-Bavnbek B., Wojciechiwski K.P. Elliptic Boundary Problems for Dirac operators. - Berlin: Birkhauser, 1993. - 308 pp.

[3] Shlapunov A.A., Tarkhanov N.N. Bases with double orthogonality in the Cauchy problem for systems with injective symbols // Proc.London Math.Soc. - 1995. - V.71. - N 3. - P. 1 - 52.

[4] Айзенберг Л.А., Кытманов А.М. О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на куске ее границы // Мат.сб. - 1991. - Т.182. - N 5. - С. 490 - 597.

[5] Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Линейные операторы и некорректные задачи. - М.: Наука, 1991. - 322 с.

[6] Тарханов Н.Н. Метод параметрикса в теории дифференциальных комплексов. - Новосибирск, 1990. - 248 с.

[7] Тарханов Н.Н. Ряд Лорана для решений эллиптических систем/ Н.Н. Тарханов.–Новосибирск, 1991.– 318 с.

[8] Tarkhanov N.N. The Cauchy problem for solutions of elliptic equations/ N.N. Tarkhanov.- Berlin: Akademie Verlag.-1995.– 480 pp.