

## Об одной обратной задаче для уравнения переноса излучения в слоистой среде

И.П. Яровенко\*

\* ИПМ ДВО РАН, ул. Радио, 4, 630041 Владивосток, Россия  
E-mail: yarovenko@iam.dvo.ru

*Работа автора была поддержана грантом НШ-9004.2006.1 конкурса ведущих научных школ РФ и грантом 06-II-CY-01-001 конкурса интеграционных проектов ДВО РАН с научными учреждениями СО РАН и УрО РАН.*

В работе рассматривается обратная задача, для стационарного, моноэнергетического уравнения переноса излучения в слоистой среде, имеющего вид:

$$\nu \frac{\partial}{\partial z} f(z, \nu, \varphi) + \mu(z) f(z, \nu, \varphi) = \mu_s(z) \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(z, \chi) f(z, \nu', \varphi') d\nu' d\varphi' + J(z, \nu, \varphi). \quad (1)$$

Здесь  $f(z, \nu, \varphi)$  интерпретируется как плотность потока излучения в точке  $z \in G$  и в направлении  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\sqrt{1-\nu^2} \cos \varphi, \sqrt{1-\nu^2} \sin \varphi, \nu)$ . Углы  $\alpha = \arccos \nu$  и  $\varphi$  представляют собой сферические координаты;  $\alpha \in [0, \pi]$  – зенитный угол, отсчитываемый от оси  $z$ , а  $\varphi \in [0, 2\pi)$  – азимут ( $\varphi = 0$  соответствует оси  $x$ ). Величина  $\nu$  является косинусом угла между направлением  $\omega$  и осью  $z$ , а  $\chi$  – косинус угла между векторами  $\omega$  и  $\omega' = (\sqrt{1-\nu'^2} \cos \varphi', \sqrt{1-\nu'^2} \sin \varphi', \nu')$

$$\chi = \omega \cdot \omega' = \nu \nu' + \sqrt{1-\nu^2} \sqrt{1-\nu'^2} \cos(\varphi - \varphi').$$

Функции  $\mu, \mu_s, J, g$  характеризуют среду и называются, соответственно, коэффициентом ослабления, коэффициентом рассеяния, плотностью внутренних источников и фазовой функцией рассеяния.

Предполагается, что среда состоит из набора слоев  $G_i = (z_{i-1}, z_i)$  разделенных плоскостями  $z = z_i, i = 0, \dots, p$ . Каждый из слоев  $G_i$ , характеризуется показателем преломления  $\kappa_i$ , коэффициентом ослабления  $\mu_i$  и коэффициентом рассеяния  $\mu_{s,i}$ . На границах раздела материалов  $z = z_i, i = 1, \dots, p-1$  ставятся условия сопряжения, моделирующие преломление и отражение по законам Френеля [4]:

$$\begin{aligned} f(z_i - 0, \nu, \varphi) &= R_i(\nu) f(z_i + 0, -\nu, \varphi) + T_i(\nu) f(z_i - 0, \psi_i(\nu), \varphi), \text{ при } \nu < 0, \varphi \in [0, 2\pi); \\ f(z_i + 0, \nu, \varphi) &= R_i(\nu) f(z_i - 0, -\nu, \varphi) + T_i(\nu) f(z_i + 0, \psi_i(\nu), \varphi), \text{ при } \nu > 0, \varphi \in [0, 2\pi), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_i(\nu) &= \begin{cases} \text{sign}(\nu) \sqrt{1 - \tilde{\kappa}_i^2(\nu)(1 - \nu^2)}, & \text{при } 1 - \tilde{\kappa}_i^2(\nu)(1 - \nu^2) \geq 0, \\ 0, & \text{при } 1 - \tilde{\kappa}_i^2(\nu)(1 - \nu^2) < 0; \end{cases} \\ \tilde{\kappa}_i(\nu) &= \begin{cases} \kappa_{i+1}/\kappa_i, & \text{при } 0 < \nu \leq 1, \\ \kappa_i/\kappa_{i+1}, & \text{при } -1 \leq \nu < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Коэффициенты  $R$  и  $T$  определяются следующими формулами:

$$R_i(\nu) = \frac{1}{2}(R_{i,\parallel}^2(\nu) + R_{i,\perp}^2(\nu)), \quad T_i(\nu) = \frac{1}{2}(T_{i,\parallel}^2(\nu) + T_{i,\perp}^2(\nu)) \frac{\tilde{\kappa}_i(\nu)\nu}{\psi_i(\nu)},$$

где

$$R_{i,\parallel}(\nu) = \frac{\tilde{\kappa}_i(\nu)\psi_i(\nu) - \nu}{\tilde{\kappa}_i(\nu)\psi_i(\nu) + \nu}, \quad R_{i,\perp}(\nu) = \frac{\psi_i(\nu) - \tilde{\kappa}_i(\nu)\nu}{\psi_i(\nu) + \tilde{\kappa}_i(\nu)\nu},$$

$$T_{i,\parallel}(\nu) = \frac{2\psi_i(\nu)}{\tilde{\kappa}_i(\nu)\psi_i(\nu) + \nu}, \quad T_{i,\perp}(\nu) = \frac{2\psi_i(\nu)}{\psi_i(\nu) + \tilde{\kappa}_i(\nu)\nu}.$$

Они характеризуют свойства границы отражать и пропускать излучение.

На внешней границе области ставится краевое условие, задающее плотность входящего потока излучения:

$$f(z_0 + 0, \nu, \varphi) = h(\nu, \varphi), \text{ при } \nu > 0, \varphi \in [0, 2\pi); \quad f(z_p - 0, \nu, \varphi) = h(\nu, \varphi), \text{ при } \nu < 0, \varphi \in [0, 2\pi). \quad (3)$$

Рассматривается следующая задача:

**Задача.** Требуется определить относительные показатели преломления  $\kappa_{i+1}/\kappa_i$  и оптические толщины  $\tau_i = \mu_i(z_i - z_{i-1})$ ,  $i = 1, \dots, p-1$  слоев из уравнения (1), граничных соотношений (2), (3) и дополнительного краевого условия

$$f(z_0 - 0, \nu, \varphi) = H(\nu, \varphi), \quad \nu < 0, \varphi \in [0, 2\pi), \quad (4)$$

если известны функции  $h$ ,  $H$ .

Задача заключается в нахождении относительных показателей преломления и оптических толщин материалов, входящих в состав многослойной среды, в случае когда известно выходящее излучение на внешней границе среды  $z = z_0$ . Решение поставленной задачи проводится в два этапа. Сначала, используя только знание о выходящем потоке (известна функция  $H$ ), находим относительные показатели преломления. Затем, при специальном типе внешнего источника (задана функция  $h$ ), обладающая специальными свойствами), находим оптические толщины сред  $G_i$ .

Для решения задачи вводится функция  $h$  специального типа. Предполагается, что при  $\varphi = \pi$  функция  $h(z, \nu, \varphi)$  имеет разрыв первого рода. Принципы построения источников излучения такого типа, можно найти, например в [1]. Величину скачка в точке  $\varphi = \pi$  обозначим через

$$\tilde{h}(z, \nu) = [h(z, \nu, \varphi)]_{\varphi=\pi} = \lim_{\varphi \rightarrow \pi+0} h(z, \nu, \varphi) - \lim_{\varphi \rightarrow \pi-0} h(z, \nu, \varphi). \quad (5)$$

Аналогично определим скачки функций  $f(z, \nu, \varphi)$  и  $H(\nu, \varphi)$ , которые будем обозначать через  $\tilde{f}(z, \nu)$ ,  $\tilde{H}(\nu)$ , соответственно.

Далее показывается, что функция  $\tilde{f}(z, \nu)$  будет удовлетворять краевой задаче (1)-(3), в случае отсутствия в среде рассеяния и внутренних источников, т.е. когда  $\mu_s(z) \equiv 0$ ,  $J(z, \nu, \varphi) \equiv 0$ . Таким образом, введение специального источника излучения позволяет избавиться от влияния рассеяния и внутренних источников излучения.

Для определения относительных показателей преломления вводится индикаторная функция, имеющая вид [3]:

$$Ind(\kappa) = \left| \int_{-1}^{\nu_0(\kappa)} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \nu}(\nu) \alpha(\kappa, \nu) d\nu \right|, \quad (6)$$

где

$$\nu_0(k) = -\sqrt{1 - \kappa^2}, \quad (7)$$

$$\alpha(\kappa, \nu) = \begin{cases} \nu / \sqrt{1 - (1/\kappa)^2 (1 - \nu^2)}, & \nu < \nu_0(\kappa) \\ 0, & \nu \geq \nu_0(\kappa). \end{cases} \quad (8)$$

Пусть выполняются условия

$$\kappa_i/\kappa_1 < 1, \kappa_i/\kappa_{i+1} > 1, \kappa_j \geq \kappa_i, j = 1, \dots, i, \quad (9)$$

тогда функция  $Ind(\kappa)$  имеет логарифмическую особенность при  $\kappa = \kappa_i/\kappa_1$  и может использоваться для определения относительного показателя преломления  $\kappa_i/\kappa_1$ . Очевидно, что в случае когда известны

все относительные показатели преломления  $\kappa_{i+1}/\kappa_1$ , нетрудно, при помощи перерасчета, определить искомые относительные показатели преломления  $\kappa_{i+1}/\kappa_i$ .

Пусть известны все относительные показатели преломления  $\kappa_j/\kappa_{j+1}$ ,  $j = 1, \dots, p-1$  и оптические толщины  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, i-1$  и выполняется условие (9), тогда оптическую толщину  $\tau_i$  можно определить по следующей формуле:

$$\tau_i = -\frac{\nu_i}{2} \ln \frac{h_{i-1}(-\psi_i(-\nu_i))}{h_{i-1}(\nu_i)R_{i-1}(-\nu_i) + T_{i-1}(-\psi_i(-\nu_i)h_{i-1}(-\nu_i))}, \quad \nu_i = -\sqrt{1 - \frac{\kappa_{i+1}}{\kappa_i}}; \quad (10)$$

где величины  $h_n$  определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$h_n(\nu) = \frac{1}{T_{n-1}(-\psi_{n-1}(-\nu))e^{\tau_n/|\nu|}} \left( h_{n-1}(-\psi_{n-1}(-\nu))(1 - R_n(\nu)R_{n-1}(-\nu)e^{-2\tau_n/|\nu|}) - \right. \\ \left. - R_n(\nu)h_{n-1}(-\nu)e^{-2\tau_n/|\nu|}T_{n-1}(-\psi_{n-1}(-\nu)) \right), \quad \nu < 0; \quad (11)$$

$$h_n(\nu) = T_n(\nu) \frac{h_{n-1}(\psi_n(\nu))e^{-\tau_n/|\psi_n(\nu)|} + R_{n-1}(\psi_n(\nu))h_n(-\psi_n(\nu))e^{-2\tau_n/|\psi_n(\nu)|}}{1 - R_n(\psi_n(\nu))R_{n-1}(-\psi_n(\nu))e^{-2\tau_n/|\psi_n(\nu)|}}, \quad \nu > 0; \quad (12)$$

$$h_0(\nu) = \begin{cases} \tilde{H}(\nu), & \nu < 0, \\ \tilde{h}(z_0, \nu), & \nu > 0. \end{cases} \quad R_0(\nu) = 0, \quad T_0(\nu) = 1, \quad \psi_0(\nu) = \nu, \quad (13)$$

Из условия (9) нетрудно заметить, что в случае монотонного поведения показателей преломления ( $\kappa_i > \kappa_{i+1}$ ) поставленная задача может быть решена полностью.

В заключении рассмотрим тестовый пример по восстановлению относительных показателей преломления и оптических толщин облучаемой среды. Пример строился в два этапа. На первом из них, по заданной структуре облучаемой среды, методом Монте-Карло, находилась функция  $H(\nu, \varphi) = f(z_0 + 0, \nu, \varphi)$  при  $\nu < 0$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . На втором этапе решалась обратная задача. При помощи вычисления функции  $Ind(\kappa)$  находились относительные показатели преломления, которые затем использовались при определении оптических толщин.

В качестве облучаемого материала использовалась четырехслойная среда: стекло-роговой слой кожи-эпидермис-дерма. Оптические характеристики моделируемой среды при длине волны  $\lambda = 337$  нм приведены в таблице 1. Значения для человеческой кожи брались из [2], а для стекла (типа "тяжелый флинт") необходимые данные можно найти на официальной интернет-странице компании ОАО "Лыткаринский завод оптического стекла" (<http://www.lzos.ru>).

**Таблица 1:** Характеристики среды для длины волны  $\lambda = 337$  нм.

Номер слоя	Вещество	Толщина (мкм)	Показатель преломления $\kappa_i$	Коэффициент ослабления $\mu_i(\text{см}^{-1})$	Коэффициент рассеяния $\mu_{s,i}(\text{см}^{-1})$	Анизотр. рассеяния $\bar{g}$
1	Стекло	5000	1.7	0.4	0.22	0.0
2	Роговой слой	20	1.55	180	160	0.8
3	Эпидермис	80	1.5	197	165	0.72
4	Дерма	200	1.4	250	227	0.72

Входящее излучение равнялось нулю на границе  $z = z_p$ , а на границе  $z = z_0$ , задавалось следующим образом

$$h(z_0, \nu, \varphi) = \begin{cases} 2, & \nu > 0, \varphi \in (0, \pi), \\ 1, & \nu > 0, \varphi \in (\pi, 2\pi). \end{cases} \quad (14)$$

При моделировании рассеяния в качестве фазовой функции  $g$  выбиралась функция Хенни-Гринштейна [2]

$$g(\chi) = \frac{1 - \bar{g}^2}{2(1 + \bar{g}^2 - 2\bar{g}\chi)^{3/2}}, \quad (15)$$

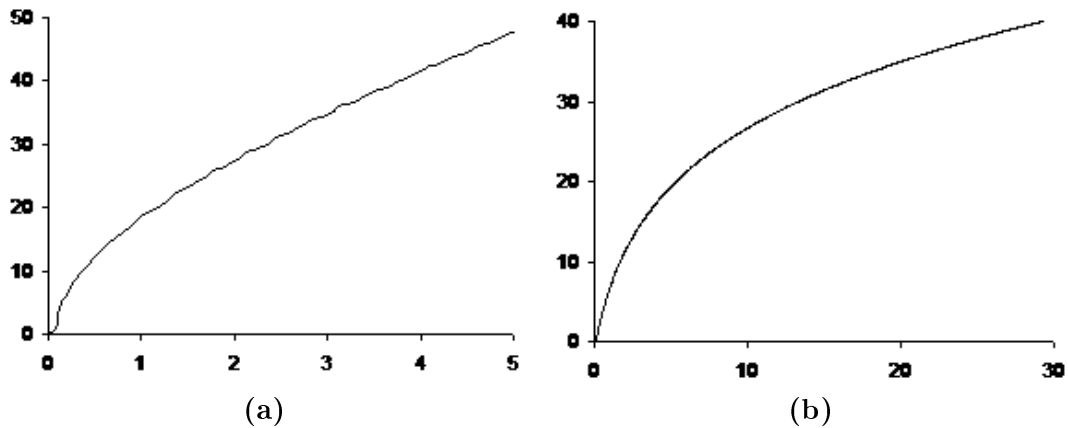
где  $\bar{g} \in (0, 1)$  - параметр, определяющий степень анизотропии рассеяния. При этом, значение  $\bar{g} = 0$  соответствует изотропному рассеянию,  $\bar{g} = 1$  — полному рассеянию вперед.

В таблице 2 приведены результаты восстановления искомых характеристик.

**Таблица 2:** Результаты численных экспериментов по восстановлению неизвестных характеристик.

$i$	Восстановление $\tilde{\kappa}_i$	Точное значение $\tilde{\kappa}_i$	Относительная ошибка %	Восстановление $\tau_i$	Точное значение $\tau_i$	Относительная ошибка %
1	0.913	0.911	0.22	0.20002	0.2	0.01
2	0.970	0.967	0.31	0.3246	0.34	4.52
3	0.928	0.933	0.53	1.1338	1.576	28.05

Как видно из таблицы 2, чем глубже находится слой тем хуже качество восстановления. Данное обстоятельство обусловлено многими факторами. Чем глубже находится слой, тем меньше вклад в выходящий поток сигнала об излучении прошедшем через него. При определении оптической толщины, на качестве реконструкции также сказывается погрешность нахождения показателей преломления и ошибки нахождения оптических толщин предыдущих слоев. На рис 1 приведены графики влияния различных факторов на точность восстановления оптической толщины третьего слоя в рассмотренном ранее тестовом примере.



**Рис. 1.:** Влияние различных факторов на величину относительной ошибки (%) определения оптической толщины

(a) — зависимость от относительной ошибки (%) восстановления показателя преломления;

(b) — зависимость от относительной ошибки (%) восстановления оптической толщины предыдущего слоя.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аниконов Д.С., Ковтанюк А.Е., Прохоров И.В. Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000.
2. Тучин В.В. Исследование биотканей методами светорассеяния. // Успехи физических наук. 1997. Т. 167. N 5 С. 517-539
3. Яровенко И.П. Численное решение краевых задач для уравнения переноса излучения в оптическом диапазоне. // Вычислительные методы и программирование. 2006. Т. 7. С. 93-104.
4. Ishimaru A. Wave Propagation and Scattering in Random Media. Academic Press, New York, 1978, Vol.1.