Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Исследование сходимости квадратурных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода

А.С. Апарцин

ИСЭМ СО РАН,
ул. Лермонтова 130
664033 Иркутск, Россия
E-mail: apartsyn@isem.sei.irk.ru

Работа была поддержана РФФИ (грант 05-01-00336)

1. Одним из наиболее универсальных подходов к построению математической модели нелинейной динамической системы типа вход-выход является представление отклика системы на входной сигнал в виде полинома Вольтерра. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — скалярные функции времени. Тогда полином Вольтерра N-ой степени, отображающий $x(t)$ в $y(t)$, имеет вид

$$y(t) = \sum_{m=1}^{N} \int_0^t \cdots \int_0^t K_m(t, s_1, \dots, s_m) \prod_{i=1}^{m} x(s_i) ds_i, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

причем ядра Вольтерра K_m, $m = \overline{2, N}$, симметричны относительно $s_1, \dots, s_m$. Особый интерес для приложений представляет случай $N = 2$:

$$y(t) = \int_0^t K_1(t, s_1) x(s_1) ds_1 + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2) x(s_1) x(s_2) ds_1 ds_2, \quad t \in [0, T]. \tag{2}$$

Предположим, ядра K_1 и K_2 уже идентифицированы каким-либо способом и ставится задача определения такого входного сигнала $x(t)$, которому соответствует нужный выход $y(t)$. В такой постановке (2) является билинейным относительно $x(t)$ уравнением Вольтерра I рода. В работах [1], [2] на модельных примерах было показано, что, как и в линейном случае, метод квадратурных сумм, основанный на квадратурах правых и средних прямоугольников, применительно к (2) сходится с порядком $\mathcal{O}(h)$ и $\mathcal{O}(h^2)$ соответственно. Однако теоретическое обоснование сходимости получено в [2] лишь для частного случая, когда ядра K_1 и K_2 постоянны. Ниже приводится набросок доказательства сходимости в общем случае.

2. Принципиальное отличие билинейного уравнения (2) от линейного ($K_2 = 0$) заключается в том, что непрерывное решение $\bar{x}(t)$ уравнения (2) существует, вообще говоря, лишь в некоторой окрестности $t = 0$.

Введем следующие обозначения: $k = \min\limits_{t \in [0,T]} |K_1(t,t)| > 0$; $L_1 = \max\limits_{0 \le s \le t \le T} |K'_{1_t}(t,s)| \ge 0$;

$M_2 = \max\limits_{0 \le s \le t \le T} |K_2(t,t,s)| > 0$; $L_2 = \max\limits_{0 \le s_1, s_2 \le t \le T} |K'_{2_t}(t, s_1, s_2)| \ge 0$; $F = \max\limits_{t \in [0,T]} |y'(t)| > 0$.

Для сокращения записи примем далее $k = 1$, что не уменьшает общности.

Тогда, согласно [3], [4], $\bar{x}(t) \in C_{[0,T]}$, если $T < T^*$, где

$$T^* = \frac{1}{4 M_2 F} \quad \text{при} \quad L_1 = L_2 = 0; \tag{3}$$

$$T^* = \frac{L_1 + 2M_2F}{L_1^2} \ln\left(1 + \frac{L_1}{2M_2F}\right) - \frac{1}{L_1} \quad \text{при} \quad L_1 \neq 0, \quad L_2 = 0. \tag{4}$$

Формулы для T^* при $L_1 \neq 0, \quad L_2 \neq 0$ можно найти в [3]. Далее предполагается, что условие $T < T^*$ для (2) выполнено.

Введем сетку узлов $t_i = ih$, $i = \overline{1,n}$, $nh = T$, и, аппроксимируя интегралы в (2) квадратурой правых прямоугольников, запишем сеточный аналог (2):

$$h \sum_{j=1}^{i} K_{1_{i,j}} x_j^h + h^2 \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{i} K_{2_{i,j,k}} x_j^h x_k^h = y_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Для вычисления x_i^h из (5) имеем квадратное уравнение

$$h^2 K_{2_{i,i,i}} (x_i^h)^2 + \left[hK_{1_{i,i}} + 2 \sum_{j=1}^{i-1} K_{2_{i,j,j}} x_j^h \right] x_i^h = y_i - h \sum_{j=1}^{i-1} K_{1_{i,j}} x_j^h + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} K_{2_{i,j,k}} x_j^h x_k^h, \ i = \overline{1,n}, \tag{6}$$

причем вещественность корней (6) гарантирует неравенство $T < T^*$, а выбор нужного корня определяется условием $x_1^h \xrightarrow[h \to 0]{} \bar{x}(0) = \dfrac{y'(0)}{K_1(0,0)}$, x_1^h удовлетворяет квадратному уравнению (в (6) $i = 1$)

$$h^2 K_{2_{1,1,1}} (x_1^h)^2 + hK_{1_{1,1}} x_1^h - y_1 = 0.$$

Обозначим через ε^h вектор ошибки сеточного решения: $\varepsilon^h = \{\varepsilon_i^h\} \equiv \{\bar{x}_i - x_i^h\}$, $\quad i = \overline{1,n}$, где $\bar{x}_i = \bar{x}(t_i)$. Вектор $\{\varepsilon_i^h\}$, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяет СЛАУ

$$h \sum_{j=1}^{i} K_{1_{i,j}} \varepsilon_j^h + h^2 \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{i} K_{2_{i,j,k}} (\overline{x}_j \varepsilon_k^h + x_k^h \varepsilon_j^h) = -R_i(\bar{x}), \quad i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

где $R_i(\bar{x})$ — суммарная погрешность квадратуры на $[0, t_i]$ и $[0, t_i] \times [0, t_i]$. В отличие от аналогичной СЛАУ в линейном случае, в (7) входят и векторы $\{\bar{x}_i\}$, $\{x_i^h\}$, $i = \overline{1,n}$. В работе [4] установлена оценка $|\bar{x}(t)| \leq \Phi(t)$, $\quad 0 \leq t \leq T < T^*$, где

$$\Phi(t) = \frac{F}{\sqrt{1 - 4M_2Ft}}, \quad \text{если} \quad L_1 = L_2 = 0;$$

$$\Phi(t) = -\frac{L_1}{2M_2} \frac{W\left(-\frac{2M_2F}{L_1 + 2M_2F} \exp \frac{L_1^2 t - 2M_2F}{L_1 + 2M_2F} \right)}{1 + W\left(-\frac{2M_2F}{L_1 + 2M_2F} \exp \frac{L_1^2 t - 2M_2F}{L_1 + 2M_2F} \right)}, \quad \text{если} \quad L_1 \neq 0, \quad L_2 = 0. \tag{8}$$

В (8) $W(z)$ — главная вещественная ветвь функции Ламберта [5] (в [4] для случая $L_1 \neq 0$, $L_2 \neq 0$ также получено представление $\Phi(t)$ в терминах второй вещественной ветви функции Ламберта). Для установления равномерной по h ограниченности сеточного решения важную роль играет

Лемма 1. *Пусть X — множество решений числового неравенства*

$$ax \leq b + cx^2, \quad x, \ a, \ b, \ c > 0.$$

Тогда при $a^2 > 4bc$ $\quad X = X_1 \cup X_2$, где

$$X_1 = \{x : \ x \leq x^* = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2c}\}, \quad X_2 = \{x : \ x \geq x^{**} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2c}\},$$

а при $a^2 \leq 4bc$ $\quad X = R_+$.

С помощью леммы 1 доказывается

Теорема 1. *Справедливо неравенство*

$$|x_i^h| \le \Phi(T), \quad i = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Далее. Стандартным способом устанавливается, что при достаточной гладкости исходных данных в (2) для квадратуры правых прямоугольников верна оценка $|R_i(\bar{x}) - R_{i-1}(\bar{x})| \le ch^2, \quad i = \overline{2,n}, \quad c = \text{const}$. Наконец, с учетом (9) доказывается основная

Теорема 2. *Пусть*

$$\gamma(T) = 2h_0 M_2 \Phi(T) + 2M_2 T \Phi(T) < 1, \tag{10}$$

тогда при $h \le h_0$

$$|\varepsilon_i^h| \le \frac{ch}{1-\gamma(T)}\, \mathrm{e}^{\frac{(L_1 + 2M_2\Phi(T) + 2L_2 T\Phi(T))T}{1-\gamma(T)}}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{11}$$

Из (11) и вытекает сходимость метода правых прямоугольников с порядком $\mathcal{O}(h)$.

Замечание 1. Расчеты тестовых примеров показывают, что дополнительное ограничение (10) на величину T не является следствием грубости техники доказательства, а отвечает существу дела — нарушение (10) может приводить к появлению погранслоя ошибок.

Замечание 2. При соответствующей гладкости исходных данных в (2) приведенный аппарат обеспечивает доказательство сходимости метода средних прямоугольников с порядком $\mathcal{O}(h^2)$. Аналогичный результат справедлив и для метода интегрирования произведения (product integration method), рассмотренного в линейном случае в [6] и особенно эффективного для сильно осциллирующих ядер Вольтерра.

Замечание 3. Если исходные данные в (2) известны с погрешностью в равномерной метрике, то метод квадратур обладает саморегуляризующим свойством, причем асимптотические оценки для $h(\delta)$ и $|\varepsilon^{h(\delta)}|$ сохраняются теми же, что и в линейном случае.

Список литературы

[1] А.С. Апарцин, Е.В. Маркова. О численном решении билинейного уравнения Вольтерра I рода. // Труды XII Байкальской международной конференции, Иркутск. — 2001. — Т. 4. — С. 20-24.

[2] Apartsyn A.S., Markova E.V. On numerical solution of the multylinear Volterra equations of the first kind // Proceedings of The International Conference on Computational Mathematics, Part 2. Novosibirsk. — 2002. — P.322-326.

[3] Апарцин А.С. О билинейных уравнениях Вольтерра I рода // Оптимизация, управление, интеллект. — 2004. — 2(8). — С. 20-28.

[4] Апарцин А.С. О полилинейных уравнениях Вольтерра I рода // Автоматика и телемеханика. — 2004. — №2. — С. 118-125.

[5] Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert W function // Advances Computational Maths. — 1996. — Vol. 5. — P.329-359.

[6] Linz P. Product integration method for Volterra integral equations of the first kind //BIT. — 1971. — Vol. 7. — P. 413-421.