Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Условия сходимости разностных методов решения некорректной задачи Коши в банаховом пространстве

А.Б. Бакушинский*, М.Ю. Кокурин, В.В. Ключев*****

* ИСА РАН,
пр. 60-летия Октября, 9,
117312 Москва, Россия
E-mail: bakush@isa.ru

** Марийский госуниверситет,
пл. Ленина, 1,
424001 Йошкар-Ола, Россия
E-mail: kokurin@marsu.ru

*** Марийский госуниверситет
пл. Ленина, 1,
424001 Йошкар-Ола, Россия
E-mail: vfri@mail.ru

Работа авторов была поддержана РФФИ (грант 06-01-282а)

Рассматривается задача Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \quad x(0) = f, \tag{1}$$

где $A : D(A) \subset X \to X$ — неограниченный замкнутый оператор, действующий в банаховом пространстве X; $\overline{D(A)} = X$, $f \in D(A)$. Предполагается, что спектр $\sigma(A)$ обладает свойством $\sigma(A) \subset K(\varphi_0)$, $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$ и имеет место оценка $\|(\zeta E - A)^{-1}\| \leq C_0(1 + |\zeta|)^{-1} \forall\zeta \in \mathbf{C}\backslash K(\varphi_0)$, если обозначить $K(\varphi) = \{\zeta \in \mathbf{C}\backslash\{0\} : |\arg\zeta| < \varphi\}$. При указанных условиях задача определения функции $x = x(t)$, $t \in [0,\ T]$ является некорректно поставленной.

В работе [1] рассмотрен следующий класс разностных схем численной аппроксимации решения задачи (1):

$$\sum_{\nu=0}^{k} \alpha_\nu x_{n+\nu} = \Delta t \sum_{\nu=0}^{k} \beta_\nu A x_{n+\nu},\ 0 \leq n \leq N-k,\ \Delta t = \frac{T}{N}; \tag{2}$$

$$x_0 = x_1 = \cdots = x_{k-1} = f.$$

Здесь $k \geq 1$ — фиксированное натуральное число, α_ν, β_ν, $0 \leq \nu \leq k$ — вещественные числа, выбор которых определяет конкретную разностную схему.

В докладе сообщаются условия на α_ν, β_ν, $0 \leq \nu \leq k$ и ограничения на величину отрезка $[0,\ T]$, на котором ищется решение, при выполнении которых для приближений x_n, порождаемых схемой (2)

1) включение $x(T) \in D(A^p)$, $p > 0$ влечет оценку

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq C_1(-\ln\Delta t)^{-p}, \quad 0 \leq n \leq N-1,\ \Delta t \in (0, \varepsilon), \tag{3}$$

с постоянной C_1, не зависящей от $n, \Delta t$;

2) существование решения задачи (1) на отрезке $[0,\ T_1]$, $T_1 > gT > T$ влечет выполнение оценки $\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq C_2(\Delta t)^q$, $0 \leq n \leq N$, $\Delta t \in (0, \varepsilon)$ для $\forall q \in (0, p)$, где $p = O(T_1 - gT)$, $T_1 \to gT$ определяется выбранным методом .

Исследовалась также необходимость условия $x(T) \in D(A^s)$, $(s > 0)$ для выполнения оценок вида (3). Установлено, что если (3) имеет место для всех $0 \leq n \leq N$ с показателем $p \in (0,\ 1)$, то $x(T) \in D(A^q)$ с некоторым $0 < q(p) < p$ при соответствующих ограничениях на параметры разностной схемы.

Литература

1. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Ключев В.В. Об оценке скорости сходимости и погрешности разностных методов аппроксимации решения некорректной задачи Коши в банаховом пространстве // Вычисл. методы и программирование.-2006, Т.7.-С.163-171.