

Построение численных алгоритмов решения динамических задач для неоднородных сред на основе нескольких аппроксимаций искомых функций.

И.О. Богульский*, Ю.М. Волчков**

* ИВМ СО РАН,
академгородок,
660036 Красноярск, Россия
E-mail: bogul@icm.krasn.ru

** ИГиЛ СО РАН,
пр. Ак. Лаврентьева, 15,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: volk@hydro.nsc.ru

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00728, ФОИН грант 06-08-00920-а) и Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (грант НШ - 6481.2006.1)

Для решения задач сейсмологии часто применяется полуаналитический метод, основанный на сведении исходной многомерной задачи к семейству одномерных краевых задач с последующим восстановлением решения. При решении этих задач классическими разностными схемами встречаются серьезные трудности.

Анализ задачи и тестовые расчеты показывают, что численное решение такого рода задач с применением разностной схемы возможно только в том случае, если при построении алгоритма были выполнены следующие условия:

- алгоритм дает монотонное решение и, в частности, не искажает его в окрестности оси симметрии при решении задачи в осесимметричной постановке;
- метод допускает естественную формулировку физических краевых условий (отсутствуют сложности, связанные с введением фиктивных слоев, и т. д.);
- схема не обладает искусственной диссипацией ни на продольных, ни на поперечных волнах (опыт показывает, что наличие даже малой искусственной диссипации очень скоро приводит к полному затуханию возмущения);
- алгоритм допускает обобщение на случай существенно неоднородной среды;
- условия на границах выделенного для численного решения объема эффективно обеспечивают неотражение от этих границ.

В докладе излагаются принципы построения алгоритмов, в основном удовлетворяющих сформулированным требованиям и приводятся примеры решения задач динамики деформируемых твердых тел с использованием таких алгоритмов [1]. Принципы формулировки предлагаемых вычислительных алгоритмов возникли под влиянием идей С. К. Годунова [2].

В отличие от классических конечно-элементных подходов процедура нескольких аппроксимаций для каждой из искомых функций дает возможность сформировать достаточную для обеспечения монотонности численного решения искусственную диссипацию с одновременным расщеплением многомерной задачи на ряд независимых одномерных задач по пространственным направлениям. Содержащиеся в одномерных задачах параметры — константы диссипации — позволяют регулировать в получаемых схемах величину искусственной вязкости. При этом процедура решения каждой из этих одномерных задач является независимой и может быть как явной, так и неявной.

При частном выборе констант диссипации, для случая регулярных сеток, получающаяся явная схема полностью совпадает со схемой Годунова. В то же время, одно из преимуществ подхода состоит в

возможности построения схем, обладающих лучшими диссипативными свойствами по сравнению с методом распада разрыва. Существенно, что при этом не происходит увеличение числа арифметических операций, т. е. помимо улучшения диссипативных характеристик возрастает экономичность схемы.

1. Одномерные гиперболические системы первого порядка. Необходимость исследования и построения эффективных численных алгоритмов решения одномерных задач для гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных в первую очередь определяется тем, что решение этих задач является основным элементом процедуры численного интегрирования многомерных задач (расщеплении на ряд одномерных), и качеством решения одномерных задач определяется эффективность алгоритма в целом.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, которая описывает распространение волны сжатия в тонком упругом стержне:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1)$$

Здесь u — скорость частиц в направлении оси стержня; σ — напряжение на площадке, нормальной к оси стержня; известные функции переменной x (постоянные в случае однородного стержня) $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ и $a(x) \geq a_0 > 0$ имеют смысл плотности среды и модуля Юнга соответственно. Первое уравнение представляет собой уравнение движения частиц среды, второе — почленно продифференцированный по переменной t закон Гука.

К этой же системе уравнений мы приходим, рассматривая одномерную задачу о распространении упругих волн в изотропной полубесконечной среде $x \geq 0$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$ в случае, когда краевые условия при $t = 0$ и $x = 0$ не зависят от переменных y и z . В этом случае мы имеем три независимые системы вида (1). Одна из них описывает распространение плоской продольной волны сжатия, две другие — волны сдвига. Для однозначного определения решения необходимо задать краевые условия. К примеру, для решения задачи на отрезке $l_1 \leq x \leq l_2$ нужно знать значения u и σ при $t = 0$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \sigma(x, 0) = \sigma_0(x), \quad (2)$$

и некоторую линейную комбинацию u и σ при $x = l_1, x = l_2$

$$(\alpha_1 u + \beta_1 \sigma)|_{x=l_1} = f_1(t), \quad (\alpha_2 u + \beta_2 \sigma)|_{x=l_2} = f_2(t), \quad (3)$$

$$(\alpha_1/\rho c - \beta_1 \neq 0, \quad \alpha_2/\rho c + \beta_2 \neq 0, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0).$$

Для поставленной задачи имеет место энергетическое тождество (закон сохранения энергии):

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{l_1}^{l_2} \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u^2}{\partial t} dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{l_1}^{l_2} \sigma \frac{\partial u}{\partial x} dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial(u\sigma)}{\partial x} dt dx. \quad (4)$$

Слагаемые в левой части (4) представляют собой приращения соответственно кинетической и потенциальной энергий за промежуток времени $[t_1, t_2]$, интеграл в правой части — разность работ, произведенных внешними силами за промежуток времени $[t_1, t_2]$ на торцах $x = l_2$ и $x = l_1$. Тождество (4) позволяет показать единственность решения задачи (1), (2), (3) для определенного набора величин $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$.

Численная схема решения задачи (1), (2), (3) строится следующим образом.

Разобьем область определения функций $u(x, t)$ и $\sigma(x, t)$ прямыми $x = x_j$, $t = t_k$ ($j = 0, \dots, N$, $k = 0, \dots, M$) параллельными осям координат Ox и Ot , на элементарные прямоугольники $\omega = \{t_k \leq t \leq t_{k+1}, x_j \leq x \leq x_{j+1}\}$. Как и ранее, будем считать величины ρ и c постоянными, а разбиение расчетной области равномерным: $x_{j+1} - x_j = h$, $t_{k+1} - t_k = \tau$.

С элементарным прямоугольником ω свяжем локальные координаты ξ и η :

$$\xi = \frac{2}{h} \left[x - \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}) \right], \quad \eta = \frac{2}{\tau} \left[t - \frac{1}{2}(t_k + t_{k+1}) \right],$$

так что $\omega = \{-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1\}$. В качестве приближенного решения в прямоугольнике ω примем функции

$$u = u_0 + u_1\eta, \quad \sigma = \sigma_0 + \sigma_1\eta, \quad (5)$$

$$u' = u'_0 + u'_1\xi, \quad \sigma' = \sigma'_0 + \sigma'_1\xi, \quad (6)$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma'}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho c^2 \frac{\partial u'}{\partial x}. \quad (7)$$

Пусть полиномы (5) удовлетворяют начальным условиям

$$u|_{t=0} = \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u_0(x) dx, \quad \sigma|_{t=0} = \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sigma_0(x) dx, \quad (8)$$

а полиномы (6) — граничным условиям (3) в виде

$$(\alpha_1 u' + \beta_1 \sigma')|_{x=l_1} = \widehat{f}_1, \quad (\alpha_2 u' + \beta_2 \sigma')|_{x=l_2} = \widehat{f}_2, \quad (9)$$

где $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2$ — средние значения $f_1(t), f_2(t)$ на каждом отрезке $[t_k, t_{k+1}]$.

Если ввести обозначения

$$u|_{\eta=-1} = u_{j+\frac{1}{2}}, \quad u|_{\eta=1} = u_{j+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}, \quad \sigma|_{\eta=-1} = \sigma_{j+\frac{1}{2}}, \quad \sigma|_{\eta=1} = \sigma_{j+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}},$$

$$u'|_{\xi=-1} = u_j, \quad u'|_{\xi=1} = u_{j+1}, \quad \sigma'|_{\xi=-1} = \sigma_j, \quad \sigma'|_{\xi=1} = \sigma_{j+1},$$

то

$$u'_0 = \frac{1}{2}(u_{j+1} + u_j), \quad u'_1 = \frac{1}{2}(u_{j+1} - u_j),$$

$$\sigma'_0 = \frac{1}{2}(\sigma_{j+1} + \sigma_j), \quad \sigma'_1 = \frac{1}{2}(\sigma_{j+1} - \sigma_j).$$

Подставляя (5), (6) в (7) мы получаем связь между решениями на нижнем и верхнем слоях по времени

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = u_{j+\frac{1}{2}} + \frac{R}{\rho c}(\sigma_{j+1} - \sigma_j), \quad \sigma_{j+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \sigma_{j+\frac{1}{2}} + \rho c R(u_{j+1} - u_j), \quad (10)$$

что в точности соответствует связи между «малыми» и «большими» величинами в формулах метода Годунова.

Построение схемы будет закончено, если для определения $2N + 2$ неизвестных констант $u_j, \sigma_j, j = 0, \dots, N$ нам удастся дополнительно к (10) сформулировать $2N$ уравнений. Вместе с двумя граничными условиями (9) система таких уравнений будет замкнута.

При построении дополнительных уравнений заметим, что для любых функций (5), (6), удовлетворяющих уравнениям (7), справедливо тождество

$$\int_{\omega} \left(\frac{\rho}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} + \sigma \frac{\partial u'}{\partial x} \right) d\omega + \int_{\omega} D d\omega = \int_{\omega} \frac{\partial(u' \sigma')}{\partial x} d\omega, \quad (11)$$

где

$$D = (u'_0 - u_0) \frac{\partial \sigma'}{\partial x} + (\sigma'_0 - \sigma_0) \frac{\partial u'}{\partial x}. \quad (12)$$

Тождество (11) является разностным аналогом энергетического тождества (4). Заметим, что в отличие от (4) в левой части равенства (11) содержится дополнительное слагаемое $\int_{\omega} D d\omega$, которое в случае своей неотрицательной определенности имеет смысл искусственной диссипации приближенного решения в ячейке ω . Теперь мы сформулируем дополнительные уравнения в самом общем виде — в рамках

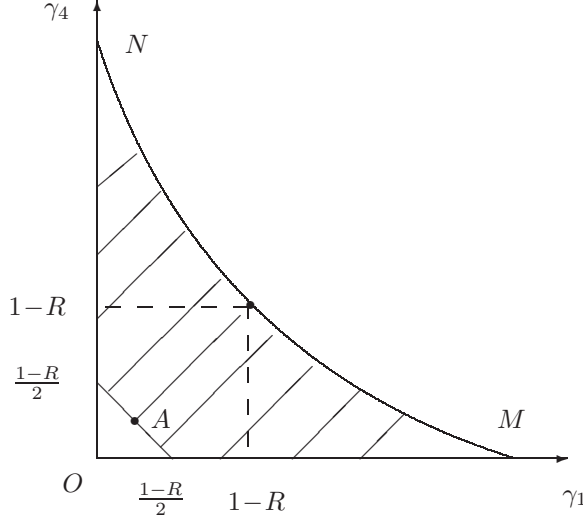


Рис. 1: Область изменения параметров диссипации

следующей идеи: мощность искусственной диссипации D должна быть квадратичной формой переменных $\partial\sigma'/\partial x$ и $\partial u'/\partial x$, знаком и величиной которой, аналогично рассмотренному выше варианту, мы могли бы управлять с помощью некоторых параметров — констант диссипации. Чтобы излишне не усложнять последующие формулы, примем константы ρ и c , входящие в систему уравнений, равными единице. Фактически это означает, что мы обезразмериваем систему, отнеся неизвестные функции u и σ соответственно к c и ρc^2 .

Пусть дополнительные уравнения для определения u_j, σ_j имеют вид:

$$u'_0 - u_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial\sigma'}{\partial x} = \frac{\gamma_1}{2} \frac{\partial\sigma'}{\partial x} + \gamma_2 \frac{\partial u'}{\partial x}, \quad \sigma'_0 - \sigma_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\gamma_4}{2} \frac{\partial u'}{\partial x} + \gamma_3 \frac{\partial\sigma'}{\partial x}. \quad (13)$$

Тогда

$$D = \frac{1}{2} \left[\gamma_1 \left(\frac{\partial\sigma'}{\partial x} \right)^2 + 2(\gamma_2 + \gamma_3) \frac{\partial\sigma'}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial x} + \gamma_4 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (14)$$

Для неотрицательности D , а следовательно, и для устойчивости схемы, необходимо потребовать

$$\gamma_1 \geq 0, \quad \gamma_4 \geq 0, \quad (\gamma_2 + \gamma_3)^2 \leq \gamma_1 \gamma_4. \quad (15)$$

Из $2N$ уравнений (13) и граничных условий величины с целочисленными индексами u_j, σ_j однозначно определяются, если некоторым образом выбраны константы диссипации $\gamma_1, \dots, \gamma_4$. За счет выбора констант диссипации можно строить как явные схемы, так и неявные. Для построения явной схемы достаточно, например, положить

$$\gamma_2 + \gamma_3 = 0, \quad 1 - \gamma_2^2 = (\gamma_1 + R)(\gamma_4 + R). \quad (16)$$

При этом схема будет содержать два свободных параметра γ_1 и γ_4 . Простейший вариант схемы получится, если положить $\gamma_2 = 0$ и $\gamma_1 = \gamma_4$. Тогда из (16) $\gamma_4 = \gamma_1 = 1 - R$ и явная схема в этом случае полностью совпадает со схемой Годунова.

Так как $\gamma_2^2 \geq 0$, то из ограничений (15) и (16) следует, что параметры γ_1 и γ_4 изменяются внутри криволинейного треугольника OMN , ограниченного отрезками прямых $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_4 = 0$ и гиперболой $(\gamma_1 + R)(\gamma_4 + R) = 1$ (рис. 1).

На рис. 1 заштрихована часть криволинейного треугольника OMN , в которой расчеты показали монотонный профиль приближенного решения. Область монотонности лежит вне треугольника $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_4 \geq 0$, $\gamma_1 + \gamma_4 \leq (1 - R)/2$. Можно выбрать $\gamma_1 = \gamma_4 = (1 - R)/4$ (точка A на рис. 1). В этом случае схема будет обладать примерно в 4 раза меньшей диссипацией, чем схема (*). Отметим, что при этом структура вычислительного алгоритма остается той же, что и для схемы Годунова, не появляется и дополнительных вычислительных затрат. Интересным оказывается минимально отличающийся от схемы Годунова вариант схемы (10), в котором $\gamma_2 = 0$, но $\gamma_1 \neq \gamma_4$.

2. Численное решение краевых задач для одномерных систем гиперболических уравнений. Изложенный выше подход обобщается на случай решения задач для одномерных систем гиперболических уравнений. Принципиально новым элементом при построении схем является процедура независимой аппроксимации младших (недифференциальных) членов уравнений. За счет произвола, возникающего в результате использования нескольких локальных аппроксимаций (в том числе и независимой аппроксимации для младших членов уравнений), можно построить схемы, которые наряду с обычными условиями аппроксимации и устойчивости удовлетворяют ряду дополнительных требований. Эти требования сводятся к тому, что разностная схема должна хорошо моделировать свойства решений исходной системы дифференциальных уравнений в условиях, когда шаги сетки остаются конечными. Так, при решении задач, описывающих процессы поглощения, существенное значение имеет свойство асимптотической устойчивости схемы, а при аппроксимации динамических задач механики твердого тела (осесимметричные задачи динамики и задачи динамики тонких оболочек вращения) важным является свойство устойчивости относительно соответствующего статического решения.

3. Примеры численного решения задач механики однородных и неоднородных сред. Приводятся результаты численного решения с использованием предложенных алгоритмов следующих задач. Задачи о прохождении волны через многослойную упругую преграду. Моделирование множественного ударного воздействия жестких ударников на упругую плиту. Задачи о распространении сейсмических волн в вертикально-неоднородной среде.

4. Определение физических и геометрических характеристик слоисто-неоднородной среды. Мы ограничиваемся рассмотрением простой слоистой структурной среды, а в качестве основного элемента решения задачи используем предложенные алгоритмы решения прямых задач. Пусть на основе сейсмоакустического зондирования требуется определить механические характеристики (и, следовательно, оценить прочностные свойства) дна водоема относительно небольшой (5–10 метров) известной глубины. Одна из наиболее простых возможных математических формулировок этой задачи будет следующей. Пусть рассматриваемая область представляет собой слоистое полупространство бесконечной глубины, которое имеет следующую структуру. Верхний слой известной глубины h_0 — это слой воды, плотность которой ρ_0 и скорость распространения звуковых волн c_0 известны. Ниже расположен упругий слой неизвестной толщины h . Его плотность ρ_1 , скорости распространения продольной и поперечной упругих волн c_p^1 и c_s^1 соответственно. Еще ниже к нему примыкает полубесконечный упругий слой плотности ρ_2 , скорости распространения упругих волн в котором c_p^2 и c_s^2 соответственно. Считаем, что возмущение в среде возбуждается источником взрывного типа, расположенным в точке M внутри слоя жидкости, а в известных точках A , B , C поверхности $z = 0$ расположены приемники, фиксирующие изменение во времени вертикальной составляющей вектора скорости u_z . При решении поставленной задачи строится и минимизируется целевой функционал, характеризующий отклонение в подходящей норме зарегистрированного поля от рассчитанного для некоторой модели среды.

Литература

1. Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Богульский И.О. и др. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. / Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002. — 352 с.
2. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47. Вып. 3. С. 271-306.